Fysiikan matemaattiset menetelmät III   Sl 2003, Harjoitus 1

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 24.9. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Osoita että $|S_N| = N!$

2. Tarkastele ryhmää $G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, missä

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ja tulona on matriisitulo. Osoita että tämä on isomorfinen erään tunnetun ryhmän kanssa. Konstruoi isomorfismi eksplisiittisesti.

3. Tasasivuinen kolmio on symmetrinen heijastusten suhteen kun heijastusakselina on kolmion kärjen ja keskipisteen kautta kulkeva suora, sekä 120 asteen kiertojen suhteen (kun kiertoakselina on kolmion keskipiste, kierrot oletetaan suunnistetuksi vastapäivään). Olkoon e identtinen kuvaus, a 120 asteen kierto ja b em. heijastus. Tarkastelee ryhmää jonka generoivat e, a ja b kun tulona on kuvausten yhdistäminen. Mikä on ryhmän kertaluku? Konstruoi ryhmän kertotaulu.

4. Samaan tapaan kuin edellisessä tehtävässä, suorakulmio on symmetrinen identtisen kuvauksen e suhteen, 180 asteen kiertojen a suhteen, pystysuoran symmetria-akselin heijastusten b suhteen, vaakasuoran symmetria-akselin heijastusten c suhteen. Konstruoi suorakulmion symmetriaryhmän kertotaulu. Mikä ryhmä on kyseessä?.

5. Osoita että $\mathrm{U}(n)$ on $\mathrm{GL}(n, C)$:n aito aliryhmä, ja että $\dim \mathrm{U}(n) = n^2$.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, September 24.

1. Show that $|S_N| = N!$.

2. Consider the group $G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, where

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and the law of composition is matrix multiplication. Show that G is isomorphic to a known group and give an explicit construction of the isomorphism.

3. An equilateral triangle is symmetric under reflections, with the line passing through the center and one of the vertices as the reflection axis; and symmetric under 120 degree counterclockwise rotations (with the center as the fixed point). Let e be the identity map, a a rotation by 120 degrees and b the reflection mentioned above. Consider the group generated by e, a and b with composition of transformations as the group multiplication. What is the order of the group? Construct the multiplication table.

4. Similarly as in the previous exercise, a rectangle is symmetric under the identity map e, under 180 degree rotations a, under reflections b about the vertical symmetry axis and reflections c about the horizontal symmetry axis. Construct the multiplication table for the symmetry group of the rectangle. Can you identify the group?

5. Show that $\mathrm{U}(n)$ is a proper subgroup of $\mathrm{GL}(n, C)$ and that $\dim \mathrm{U}(n) = n^2$.