9. FUNKTIONAALIDERIVAATTA

VARIAATIOLASKENTA VOIDAAN MUOTOILLA TAVALLISTA DIFFERENTIAALILASKENTAA VASTAAVAAN MUOTOON FUNKTIONAALEILLE $F[y]$, JOIDEN MÄÄRITTELYJOUKKO ON TESTIFUNKTIOAVARUUS S_1 (NOPEASTI HÄVIÄVÄT FUNKTIOT REAALIAKSELILLA) TAI D_1 (KOMPAKTIKANTAJAN FUNKTIOT — " —)

MÄÄRITELLÄÄN ENSIN δ-JONO:

FUNKTIOT $\delta_1(x), \delta_2(x), \ldots$ MUODOSTAVAT δ-JONON JOS

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_n(x) = 1 \quad \forall n$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\,\delta_n(x) = \varphi(0)$

KUN $\varphi \in D_1$ TAI $\varphi \in S_1$

δ-JONOJA LÖYTYY MONTA, ESIM.

1) $$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{2n} \\ 0 & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

2) $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}$

3) $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2x^2}$

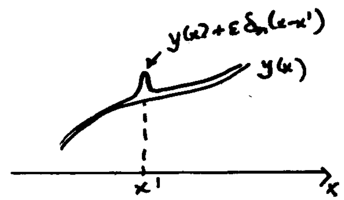
4) $\delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$

JNE.

HALUAMME TIETÄÄ KUINKA NOPEASTI $F[y]$ MUUTTUU KUN $y(x)$ MUUTETAAN HIEMAN $x = x'$:N YMPÄRISTÖSSÄ

MÄÄR. FUNKTIONAALIDERIVAATTA

$$\frac{\delta F}{\delta y(x')} = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(F[y+\varepsilon\,\delta_n(x-x')] - F[y]\Big)$$



ESIM.

1) $\displaystyle F[y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [y(x)]^p \qquad p \ge 1$

$$F[y+\varepsilon\delta_n(x-x')] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [y(x)+\varepsilon\,\delta_n(x-x')]^p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [y(x)]^p + \varepsilon p \int_{-\infty}^{\infty} dx\, y^{p-1}(x)\,\delta_n(x-x') + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{F[y+\varepsilon\delta_n(x-x')]-F[y]}{\varepsilon}\right) = p\int_{-\infty}^{\infty} dx\, y^{p-1}(x)\,\delta_n(x-x')$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} p\, y^{p-1}(x')$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta y(x')}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,[y(x)]^p = p\, y^{p-1}(x')$$

2) $$F[y] = \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, \underbrace{K(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{TÄYSIN SYMMETRINEN}}\, y(x_1)y(x_2)\cdots y(x_n)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(F[y+\varepsilon\delta(x-x')] - F[y]\Big) =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, K(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big(\delta_{\bar n}(x_1-x')y(x_2)\cdots y(x_n) +$$

$$+ y(x_1)\delta_{\bar n}(x_2-x')y(x_2)\cdots y(x_n) + \cdots + y(x_1)y(x_2)\cdots y(x_{n-1})\delta_{\bar n}(x_n-x')\Big)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, K(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\delta_{\bar n}(x_1-x')\, y(x_2)\cdots y(x_n)$$

$$\xrightarrow[\bar n\to\infty]{} \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, K(x', x_2, \ldots, x_n)\, y(x_2)\cdots y(x_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta y(x')} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, K_n(x_1, \ldots, x_n)\, y(x_1)y(x_2)\cdots y(x_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, K_{n+1}(x', x_1, \ldots, x_n)\, y(x_1)\cdots y(x_n)$$

3) $$F[y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,[y'(x)]^p \qquad p \geq 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(F[y+\varepsilon\delta_n(x-x')] - F[y]\Big)$$

$$= p\int_{-\infty}^{\infty} dx\,[y'(x)]^{p-1}\,\delta_n'(x-x') \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\to p\int_{-\infty}^{\infty} dx\,[y'(x)]^{p-1}\,\delta'(x-x') = -p\frac{d}{dx}[y'(x)]^{p-1}\Big|_{x=x'}$$

$$= -p(p-1)[y'(x')]^{p-2}\, y''(x')$$

HUOM. KÄYTÄNNÖSSÄ VOIDAAN KÄYTTÄÄ

$$\frac{\delta F}{\delta y(x')} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(F[y(x)+\varepsilon\delta(x-x')] - F[y(x)]\Big)$$

KUN SOVITAAN ETTÄ $F[y+\varepsilon\delta(x-x')]$ KEHITETÄÄN VAIN ε:N 1. KERTALUVUN TARKKUUDELLA.

FUNKTIONAALIN F STATIONAARISET PISTEET OVAT NE FUNKTIOT $y(x)$ JOILLE

$$\frac{\delta F[y]}{\delta y(x)} = 0 \qquad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

KUN $$J[y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(y, y', x) \qquad y \in D_1 \text{ TAI } S_1$$

$$\frac{\delta J[y]}{\delta y(x')} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta_n(x-x') + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta_n'(x-x')\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta(x-x') + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta'(x-x')\right]$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x'}$$

TÄLLE FUNKTIONAALILLE $\frac{\delta J}{\delta y(x')} = 0 \iff$ EULERIN YHTÄLÖ

RITZIN MENETELMÄ (W. RITZ 1908)

LIKIMÄÄRÄINEN MENETELMÄ VARIAATIO-ONGELMAN RATKAISULLE, S.O. LIKIM. MENET. EULERIN (OSITTAIS)DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN RATKAISULLE

LÖYDETTÄVÄ FUNKTIONAALIN

$$J[u] = \int_D d^n x \; f(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$$

EKSTREMAALIT KUN $u\big|_{\partial D} = g$ ANNETTU

(RATKAISTAVA OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

EULER: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}\right) - \frac{\partial f}{\partial u} = 0$)

RITZIN MENETELMÄ:

1) LÖYDETÄÄN N RIIPPUMATONTA FUNKTIOTA $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$, JOTKA TÄYTTÄVÄT EHDON $\varphi_i(x)\big|_{x\in\partial D} = g(x)$
$i = 1, \ldots, N$

2) RATKAISUYRITE: $u_Y(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x)$

3) LASKETAAN $J[u_Y] = j(a_1, a_2, \ldots, a_N)$

4) LÖYDETÄÄN FUNKTION j STATIONAARISET PISTEET $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N)$ RATKAISEMALLA

$\frac{\partial j}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, N$. MAKS., MIN., TARKASTELU

$\frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_j}\Big|$ AVULLA

5) VARIAATIO-ONGELMAN LIKIMÄÄRÄINEN RATKAISU ON

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{N} \bar{a}_i \varphi_i(x)$$

JA $J_{extr} = J[\bar{u}] = j(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N)$

ESIMERKKI

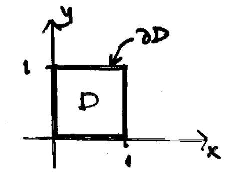
RATKAISTAVA POISSONIN YHTÄLÖ

(P) $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x,y)$ ← (ANNETTU)

NELIÖSSÄ $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

REUNAEHDOLLA

$u(x,y) = 0$ REUNALLA



(P) ON EULERIN YHTÄLÖ FUNKTIONAALILLE

$$J[u] = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\rho(x,y)\,u(x,y) \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial f}{\partial u} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\rho = 0 \right)$$

YRITEFUNKTIOIKSI VOIDAAN VALITA

$\varphi_1(x,y) = xy(1-x)(1-y)$ (SELVÄSTI $\varphi_1 = 0$ ∂D:LLÄ)

$\varphi_2(x,y) = x\,\varphi_1(x,y)$, $\varphi_3(x,y) = y\,\varphi_1(x,y)$

$\varphi_4(x,y) = x^2\varphi_1(x,y)$, $\varphi_5(x,y) = xy\,\varphi_1(x,y)$; $\varphi_6 = y^2\varphi_1(x,y)$

JNE. NIIN PITKÄLLE KUIN SIELU (TIETOKONE) SIETÄÄ

YRITE $u_Y(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x,y)$

$$J[u_Y] = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(\sum_{i,j} a_i a_j \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + 2 \sum_i a_i \varphi_i \rho \right) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} a_i a_j + 2\sum_{i=1}^{N} b_i a_i$$

$= j(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, MISSÄ

$$A_{ij} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) = A_{ji}$$

$$b_i = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \; \rho(x,y)\, \varphi_i(x,y)$$

$$\frac{\partial j}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^{N} \left(A_{ij} a_j + A_{ji} a_j \right) + 2 b_i =$$

$$= 2\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} a_j + b_i \right) = 0$$

MATRIISIKIELELLÄ

$$A\mathbf{a} = b$$

RATKAISU $\bar{a} = A^{-1} b$ ELI $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{N} (A^{-1})_{ij} b_j$

(MATRIISIN KÄÄNTÄMISELLE OLEMASSA TEHOKKAITA OHJELMIA)

$\Rightarrow$ LIKIMÄÄRÄINEN RATKAISU

$$\bar{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \bar{a}_i \varphi_i(x,y)$$

STURM-LIOUVILLE-TEORIA

(LINEAARISET OPERAATTORIT FUNKTIOAVARUUDET)

J.C.F. STURM 1803-1855

J. LIOUVILLE 1809-1882

ETUMERKKI CRONSTRÖMIN KIRJAN MUKAINEN ($q_{AW}(x) = -q_{CC}(x)$)

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + \left(-q(x) + \lambda w(x) \right) u = 0 \qquad (S-L)$$

$a \leq x \leq b$ (a SAA OLLA $-\infty$, b SAA OLLA $+\infty$)

$p(x), q(x), w(x)$ REAALIARVOISIA

$q(x), w(x)$ JATKUVIA ($\in C^0([a,b])$)

$w(x) > 0$ $x \in [a,b]$ (JOS $w(x) < 0$ MUUTETAAN $\lambda \to -\lambda$)

$p(x)$ JA $p'(x)$ JATKUVIA ($p \in C^1([a,b])$)

$p(x) \neq 0$ $a < x < b$, VALITAAN ETUMERKKI S.E. $p(x) > 0$

JOS LISÄKSI $p(a) \neq 0$ JA $p(b) \neq 0$ (JA $a \neq -\infty$, $b \neq \infty$ KYSEESSÄ) ON <u>SÄÄNNÖLLINEN</u> S-L ONGELMA

JOS $p(a) = 0$ JA/TAI $p(b) = 0$ <u>SINGULAARINEN</u> S-L ONGELMA; SAMOIN JOS $a = -\infty$ TAI $b = +\infty$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + \left(q(x) + \lambda w(x)\right)u = 0 \qquad (S\text{-}L)$$

VAADITAAN <u>HOMOGEENISET</u> <u>REUNAEHDOT</u> :

SÄÄNNÖLLINEN S-L :

$$A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0 \qquad (Ra)$$
$$B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \qquad (Rb)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 ANNETTUJA REAALISIA VAKIOITA S.E. $(A_1, A_2) \neq (0,0)$ JA $(B_1, B_2) \neq (0,0)$

SINGULAARINEN S-L (S) :

$p(a) \neq 0,\ p(b) = 0$: (Ra) JA $|u(b)| < \infty$

$p(a) = 0,\ p(b) \neq 0$: (Rb) JA $|u(a)| < \infty$

$p(a) = p(b) = 0$: $|u(x)|$ RAJOITETTU $a < x < b$

OSOITTAUTUU :
YHTÄLÖLLÄ (S-L) ON REUNAEHTOJA (Ra), (Rb) TAI (S) TÄYTTÄVIÄ RATKAISUJA $u(x) \neq 0$ VAIN TIETYILLE LUVUILLE $\lambda = \lambda_k$, NÄMÄ KUTSUTAAN OPERAATTORIN $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\,u$$

<u>OMINAISARVOIKSI</u> (EIGENVALUES)

VASTAAVAT RATKAISUT $u_k(x)$ (MÄÄRÄTTYJÄ VAKIOKERROINTA VAILLE: JOS $\mathcal{L}u_k = +\lambda_k w u_k$ NIIN MYÖS $\mathcal{L}Cu_k = +\lambda_k w\, Cu_k$, C=VAKIO)

OVAT $\mathcal{L}$:N <u>OMINAISFUNKTIOT</u>

<u>HUOM.</u> $\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$ EI OLE KOVIN ERIKOINEN : (VRT. FYMM IIa:N HARJ. TEHT. 6.2)

OPERAATTORI

$$L = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

VOIDAAN KIRJOITTAA MUOTOON $L = \varphi(x)\,\mathcal{L}$

MITEN? $\varphi(x)\mathcal{L} = -\varphi(x)p(x)\frac{d^2}{dx^2} - \varphi(x)p'(x)\frac{d}{dx} + \varphi(x)q(x)$

$$\Rightarrow \frac{p'}{p(x)} = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \iff \frac{dp}{p} = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow \underline{p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, \frac{a_1(x')}{a_2(x')}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi(x)} = -\frac{a_2(x)}{p(x)} = \underline{-a_2(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, \frac{a_1(x')}{a_2(x')}}}$$

$$\underline{q(x)} = \frac{a_0(x)}{\varphi(x)} = \underline{-\frac{a_0(x)}{a_2(x)}\, e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, \frac{a_1(x')}{a_2(x')}}}$$

YHTÄLÖ $Lu(x) = \lambda w(x) u(x)$ ON SIIS YHTÄPITÄVÄ YHTÄLÖN $\varphi(x)\mathcal{L}u(x) = \lambda w(x) u(x)$

ELI $\mathcal{L}u(x) = \lambda \frac{w(x)}{\varphi(x)} u(x) \equiv \lambda\, \tilde{w}(x)\, u(x)$

MISSÄ $\underline{\tilde{w}(x)} = +\frac{w(x)}{\varphi(x)} = \underline{-\frac{w(x)}{a_2(x)}\, e^{+\int_{x_0}^{x} dx'\, \frac{a_1(x')}{a_2(x')}}}$

RIKOISFUNKTIOT JA STURM-LIOUVILLE

ENDRE

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] = \ell(\ell+1)P_\ell(x)$$

$a=-1,\ b=1$ $\quad p(x)=1-x^2$ $\quad$ SINGULAARINEN

$q(x)=0$

$w(x)=1$

$\lambda=\ell(\ell+1)$

ENDREN LIITTOFUNKTIOT

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell^m(x)}{dx}\right] + \frac{m^2}{1-x^2}P_\ell^m(x) = \ell(\ell+1)P_\ell^m(x)$$

$a=-1,\ b=1$ $\quad p(x)=1-x^2,\quad q(x)=\frac{m^2}{1-x^2},\quad w(x)=1$

$\lambda=\ell(\ell+1)$

SEL

$R>0$ $\quad J_\nu(x)$:N JOKIN NOLLAKOHTA

$\xi=\frac{x}{R}$ $\quad 0\le\xi\le 1$ $\quad a=0,\ b=1$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi\frac{dJ_\nu(\xi R)}{d\xi}\right] + \frac{\nu^2}{\xi}J_\nu(\xi R) = R^2\xi J_\nu(\xi R)$$

$p(\xi)=\xi,\quad q(\xi)=\frac{\nu^2}{\xi},\quad w(\xi)=\xi,\quad \lambda=R^2$

UERRE

$$-\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dL_n}{dx}\right] = ne^{-x}L_n(x) \qquad 0\le x<\infty$$

$a=0,\ b=\infty$

$p(x)=xe^{-x}\quad q(x)=0,\quad w(x)=e^{-x},\quad \lambda=n$

– LAGUERREN LIITTOPOLYNOMIT :

$$-\frac{d}{dx}\left(x^{k+1}e^{-x}\frac{dL_n^k}{dx}\right) = x^k e^{-x} n L_n^k(x) \qquad \underset{a}{0}\le x<\underset{b}{\infty}$$

$p(x)=x^{k+1}e^{-x}\quad q(x)=0\quad w(x)=x^k e^{-x}\quad \lambda=n$

– HERMITEN POLYNOMIT

$$-\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dH_n}{dx}\right] = 2ne^{-x^2}H_n(x) \qquad \underset{a}{-\infty}\le x\le\underset{b}{\infty}$$

$p(x)=e^{-x^2}\quad q(x)=0$

$w(x)=e^{-x^2}\quad \lambda=2n$

STURM-LIOUVILLEN TEORIAN
YKSINKERTAINEN ESIMERKKI

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad 0 \le x \le \pi \quad (E1)$$

ELI $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$

$a = 0$, $b = \pi$

REUNAEHDOT: $u(0) = 0 \quad (E2)$

$u(\pi) = 0 \quad (E3)$

MILLÄ λ:N ARVOILLA LÖYTYY RATKAISUJA ?

(E1):N YLEINEN RATKAISU ON

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\lambda = re^{i\theta} \quad \sqrt{-\lambda} = \underset{\text{POS. NELIÖJUURI}}{\sqrt{r}} \; e^{\frac{i}{2}(\theta+\pi)}$$

REUNAEHDOT $\Rightarrow$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad x=0$$
$$e^{\sqrt{-\lambda}\pi}C_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}C_2 = 0 \quad x=\pi$$

NOLLASTA EROAVA RATKAISU LÖYTYY VAIN JOS

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{-\lambda}\pi = 2n\pi i \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow +\lambda_n = +n^2$$

VASTAAVA OMINAISFUNKTIO : VALITSE $C_1 = \frac{K}{2i}$

$\Rightarrow C_2 = -\frac{K}{2i}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{K}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = K \sin(nx)$$

$n=0$ $u_0 = 0$ EI RATK.

$-n$ JA n ANTAVAT SAMAN λ_n, u_n ($u_{-n} = -u_n$, LIN. RIIPPUVAT)

$\Rightarrow$ OMINAISARVOT $\lambda_n = n^2$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

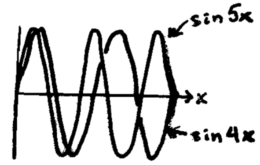
OMINAISFUNKTIOT $u_n(x) = \sin(nx)$

OMINAISUUKSIA (YLEISTYVÄT!)

* OMINAISARVOT REAALILUKUJA
* OMINAISARVOT ALHAALTA, MUTTEI YLHÄÄLTÄ RAJOITETUT
* JOKAISTA OMINAISARVOA VASTAA YKSI OMINAISFUNKTIO (JOS LÖYTYY USEAMPIA, LIN. RIIPPUMATTOMIA, OMINAISARVO ON DEGENEROITUNUT)

* $u_n(x)$:llä $n-1$ nollakohtaa avoimella välillä (a, b)

* $u_{n+1}(x)$: llä täsmälleen yksi nollakohta $u_n(x)$:n kahden peräkkäisten nollakohdan välillä



* Eri ominaisarvoon kuuluvat ominaisfunktiot **ortogonaalisia**

$$\lambda_n \neq \lambda_m \Rightarrow \int_a^b dx\, u_n(x)\, u_m(x) = 0 \quad (w(x)=1)$$

(Tässä $\int_0^\pi dx \sin(nx)\sin(mx) = 0 \quad m \neq n$)

* Funktiot $u_n(x)$ $n=1,2,\ldots$ muodostavat täydellisen funktiojoukon (FYMM I): "mikä tahansa" $F(x)$ voidaan kehittää:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)$$

(Esimerkissämme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

Fourierin sinisarja)

ITSEADJUNGOIDUT OPERAATTORIT

FYMM I : (kompleksiarvoisten) funktioiden **skalaaritulo** on

$$f \cdot g \equiv \langle f | g \rangle \equiv \int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x)$$

Lineaarisen operaattorin A **adjungoitu operaattori** A^+ toteuttaa

$$\langle f | A g \rangle = \langle A^+ f | g \rangle$$

kaikille annetut reunaehdot toteuttaville f, g

Esim.

1. $A = \frac{d}{dx}$ reunaehdot $f(a) = f(b) = 0$

$$\langle f | A g \rangle = \int_a^b dx\, f^*(x) \frac{dg}{dx} \overset{\text{os. int.}}{=} \underbrace{\Big/_a^b f^* g}_{=0} - \int_a^b dx \frac{df^*}{dx} g(x)$$

$$= - \left\langle \frac{df}{dx} \Big| g \right\rangle$$

$$\Rightarrow A^+ = -\frac{d}{dx}$$ (HUOM. reunaehtojen merkitys!)

2. $A = \frac{d^2}{dx^2}$ reunaehdot $f(a) = f(b) = 0$

$$\langle f | A g \rangle = \int_a^b dx\, f^* \frac{d^2 g}{dx^2} = \underbrace{\Big/_a^b f^* \frac{dg}{dx}}_{=0} - \int_a^b dx \frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx} =$$

$$= -\underbrace{\Big/_a^b \frac{df^*}{dx} g}_{=0} + \int_a^b dx \frac{d^2 f^*}{dx^2} g = \langle A f | g \rangle$$

$$\Rightarrow A^+ = A$$

OPERAATTORI A, JOLLE $A^{+} = A$ (KUTEN $\frac{d^2}{dx^2}$ ESIMERKISSÄ 2) ON <u>ITSEADJUNGOITU</u>

ELI <u>HERMIITTINEN</u>

(MATEMATIIKASSA TEHDÄÄN ERO NÄIDEN KÄSITTEIDEN VÄLILLÄ LIITTYEN NIIDEN MÄÄRITTELYJOUKKOIHIN; VRT. MYÖS ARFKEN-WEBERILLÄ "KOTIKUTOINEN" ERITTELY)

STURM-LIOUVILLEN OPERAATTORI $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x)$$

$p(x)$, $q(x)$ REAALIARVOISIA

$$\langle \mathcal{L}u | v\rangle - \langle u | \mathcal{L}v\rangle = \int_a^b dx \left[v(\mathcal{L}u)^* - u^*(\mathcal{L}v)\right]$$

PÄTEE (FYMM IIa) 'LAGRANGEN IDENTITEETTI'

$$v(\mathcal{L}u)^* - u^*(\mathcal{L}v) = v\mathcal{L}u^* - u^*\mathcal{L}v$$
$$= \frac{d}{dx}\left[-p(x)\left(v\frac{du^*}{dx} - u^*\frac{dv}{dx}\right)\right],$$

JOTEN

$$\langle \mathcal{L}u | v\rangle - \langle u | \mathcal{L}v\rangle = -\Big/_a^b p(x)\left(v\frac{du^*}{dx} - u^*\frac{dv}{dx}\right)$$

REUNAEHDOT:

1) SÄÄNNÖLLINEN S-L

$x=a$:
$$A_1 u^*(a) + A_2 u'(a)^* = 0$$
$$A_1 v(a) + A_2 v'(a) = 0$$

OLKOON ENSIN $A_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ $u'(a)^* = -\frac{A_1}{A_2}u^*(a)$, $v'(a) = -\frac{A_1}{A_2}v(a)$

$$\Rightarrow v(a)u^{*\prime}(a) - u^*(a)v'(a) =$$
$$= -\frac{A_1}{A_2}\left(v(a)u^*(a) - u^*(a)v(a)\right) = 0$$

JOS TAAS $A_2 = 0$, $A_1 \neq 0$ JA EHDOT (Ra) OVAT $u(a) = v(a) = 0$

$$\Rightarrow \left(vu^{*\prime} - u^*v'\right)_{x=a} = 0$$

SAMALLA TAVALLA PÄÄTELLÄÄN, ETTÄ $x=b$:ssä $\left(vu^{*\prime} - u^*v'\right)_{x=b} = 0$

2) SINGULAARINEN S-L

1° $p(b) = 0$ & (Ra)

$$\Big/_a^b p(x)\left(vu^{*\prime} - u^*v'\right) = 0\cdot\left(vu^{*\prime} - u^*v'\right)_{x=b} - p(a)\cdot 0 = 0$$

2° $p(a) = 0$ & (Rb) ANTAA SAMOIN 0

3° $p(a) = p(b) = 0$ SIJOITUSTERMI TRIVIAALISTI $= 0$

<u>⇒ IIS</u>: $\langle \mathcal{L}u | v\rangle = \langle u | \mathcal{L}v\rangle$ ELI $\mathcal{L}^{+} = \mathcal{L}$

STURM-LIOUVILLEN OPERAATTORI ITSEADJUNGOITU REUNAEHDOILLA (Ra) & (Rb) TAI (S)

HUOM! MUILLA REUNAEHDOILLA VOI OLLA

$$\langle \mathcal{L}u | v\rangle \neq \langle u | \mathcal{L}v\rangle$$

* ITSEADJUNGOIDUN OPERAATTORIN OMINAISARVOT OVAT REAALISIA

TOD: OLKOON φ OMINAISFUNKTIO

$$\mathcal{L}\varphi = +\lambda w \varphi$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}\varphi)^* = +\lambda^* w \varphi^*$$

$$\langle \mathcal{L}\varphi | \varphi \rangle = +\langle +\lambda w \varphi | \varphi \rangle =$$

$$= +\lambda^* \int_a^b dx\, w(x)\, |\varphi(x)|^2$$

$$= \langle \varphi | \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle \varphi | +\lambda w \varphi \rangle$$

$$= +\lambda \int_a^b dx\, w(x)\, |\varphi(x)|^2$$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda^*) \underbrace{\int_a^b dx\, w(x)\, |\varphi(x)|^2}_{\neq 0 \text{ (INTEGRANDI } > 0)} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^* \quad \square.$$

* KAHTEEN ERISUUREEN OMINAISARVOON LIITTYVÄT OMINAISFUNKTIOT OVAT (TIETYSSÄ MIELESSÄ) ORTOGONAALISET:

TOD. $\mathcal{L}\varphi = +\lambda w \varphi \quad \mathcal{L}\psi = +\mu w \psi \quad \lambda \neq \mu$

$$0 = \langle \mathcal{L}\varphi | \psi \rangle - \langle \varphi | \mathcal{L}\psi \rangle = +\overset{=\lambda}{\lambda^*} \int_a^b dx\, w(x)\, \varphi^*(x)\, \psi(x)$$

$$-\mu \int_a^b dx\, w(x)\, \varphi^*(x)\, \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} \int_a^b dx\, w(x)\, \varphi^*(x)\, \psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, w(x)\, \varphi^*(x)\, \psi(x) = 0$$

ELI $\langle \sqrt{w}\,\varphi | \sqrt{w}\,\psi \rangle = 0$

(VOISIMME MYÖS MÄÄRITELLÄ SKALAARITULON

$$(f, g) = \int_a^b dx\, \underset{\uparrow \text{ "PAINOFUNKTIO"}}{w(x)}\, f^*(x)\, g(x) \quad)$$

JOLLOIN $(\varphi, \psi) = 0$

NÄMÄ TULOKSET OVAT OSA LAUSEESTA

STURMIN JA LIOUVILLEN LAUSE

YHTÄLÖN

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + \left(-q(x) + \lambda\, w(x)\right) u = 0,$$

MISSÄ $p(x), p'(x), q(x), w(x)$ REAALIARVOISIA JA JATKUVIA VÄLILLÄ $[a,b]$, $p(x) > 0$ $x \in [a,b]$, $w(x) > 0$ $x \in [a,b]$, HOMOGEENISIA REUNAEHTOJA

$$A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0$$

$$B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0$$

JOILLEKIN REAALISILLE VAKIOILLE A_1, A_2, B_1, B_2; $(A_1, A_2) \neq (0,0)$, $(B_1, B_2) \neq (0,0)$ TOTEUTTAVILLA RATKAISUILLA ON SEURAAVIA OMINAISUUKSIA:

1) RATKAISUJA ($u(x) \neq 0$) ON OLEMASSA KUN $\lambda = \lambda_k$, MISSÄ λ_k $k = 1, 2, 3, \dots$ ON ÄÄRETÖN JONO REAALISIA OMINAISARVOJA ($\lambda_{k+1} > \lambda_k$), $\lambda_k \to \infty$ KUN $k \to \infty$

2) JOKAISTA OMINAISARVOA λ_k VASTAA VAKIOKERTOJAA VAILLE YKSIKÄSITTEINEN RATKAISU $\varphi_k(x)$ ("OMINAISFUNKTIO")

3) OMINAISFUNKTIOT OVAT ORTOGONAALISIA PAINOFUNKTION $w(x)$ SUHTEEN:

$$\int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_j(x) = 0 \qquad k \neq j$$

4) OMINAISFUNKTIOIDEN JOUKKO ON <u>TÄYDELLINEN</u>, S.O.

JOS $f(x) \in L_2([a,b])$ ELI $\int_a^b dx\, |f(x)|^2$ ON OLEMASSA, JA

$$a_k = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_k(x)\, f(x)}{\int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_k^2(x)},$$

NIIN

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b dx\, \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(x) \Big|^2 = 0$$

SIIS <u>KESKIMÄÄRIN</u> $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ (*)

ELI $\int_a^b dx\, \big| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \big|^2 = 0$

(USEILLE SÄÄNNÖLLISILLE f PÄTEE (*) PISTEITTÄIN)

PÄÄTEPISTEISSÄ:

$x = a$ JOS $A_2 \neq 0$ TAI $f(a) = 0$, NIIN

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(a) = f(a)$$

$x = b$ JOS $B_2 \neq 0$ TAI $f(b) = 0$, NIIN

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(b) = f(b)$$

5) OMINAISFUNKTIOLLA $\varphi_n(x)$ ON TÄSMÄLLEEN n NOLLAKOHTAA AVOIMELLA VÄLILLÄ $a < x < b$. OMINAISFUNKTION $\varphi_{n+1}(x)$ JOKAINEN NOLLAKOHTA ON KAHDEN $\varphi_n(x)$:N PERÄKKÄISEN NOLLAKOHDAN VÄLISSÄ.

TODISTUS LÖYTYY OPPIKIRJOISTA, ESIM.
N. YOUNG: AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACE, (CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1988)

<u>SEURAUS</u>: PARSEVALIN LAUSEEN (FYMM I) YLEISTYS:

$$(f, f) = \int_a^b dx\, w(x)\, |f(x)|^2 = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k^* a_\ell \int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_\ell(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_k, \varphi_k)\, |a_k|^2$$

OMINAISARVOJEN OLEMASSAOLO (VAIN TAPAUS $u(a) = u(b) = 0$)

MUUTETAAN S-L YHTÄLÖ

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = \lambda w(x)u(x)$$

SIJOITUKSELLA $z(x) = \sqrt{p(x)}\, u(x)$

HUOM.: $z(x)$:N NOLLAKOHDAT $= u(x)$:N NOLLAKOHDAT

MUOTOON

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(Q(x) + \lambda R(x)\right) z(x) = 0 \qquad (1)$$

MISSÄ

$$Q(x) = \frac{1}{4p(x)^2}\left((p'(x))^2 - 2p(x)p''(x) - 4p(x)q(x)\right)$$

$$R(x) = \frac{w(x)}{p(x)}$$

JATKUVIA, JA $R(x) > 0$ $a \le x \le b$

CRONSTRÖMIN (§ 6.4.1.2) TODISTUKSEN RAKENNE:

1) KIINNITETÄÄN $\lambda \in \mathbb{C}$ JA RATKAISTAAN (1) ALKUEHDOILLA $z(a) = 0$, $z'(a) = 1$; RAKENNETAAN RATKAISU $z(\lambda; x)$ (DIFF. YHTÄLÖIDEN RATKAISUJEN OLEMASSAOLO- JA YKSIKÄSITTEISYYSLAUSE)

2) OSOITETAAN ETTÄ KIINTEÄLLÄ x $z(\lambda; x)$ ON PARAMETRIN λ KOKONAINEN FUNKTIO (EI NAPOJA EIKÄ MUITA SINGULARITEETTEJA)

3) $\Rightarrow$ $z(\lambda; b)$ KOKONAINEN FUNKTIO λ:STA; λ OMINAISARVO: $z(\lambda; b) = 0$

4) KÄYTETÄÄN FUNKTIOTEORIAN LAUSETTA: KOKONAISELLA NOLLASTA POIKKEAVALLA FUNKTIOLLA VOI OLLA AINOASTAAN NUMEROITUVA JOUKKO NOLLAKOHTIA, NOLLAKOHDILLA EI OLE KASAUTUMISPISTEITÄ ÄÄRELLISESSÄ λ-TASOSSA

$\Rightarrow$ OM. ARVOT MUOD. JONON $\{\lambda_n\}$ JOLLE $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$

5) TIEDETÄÄN: $\lambda_n \in \mathbb{R}$, TODISTETAAN: $\exists\, \bar{\lambda}$ S.E. $\lambda_n \geq \bar{\lambda}$ $\forall n$.

$\Rightarrow$ $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ $\quad \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

SOPIVALLA NUMEROINNILLA

TODISTAMME TÄSSÄ SAMAN TULOKSEN KÄYTTÄMÄTTÄ FUNKTIOTEORIAA (JA OPITAAN SAMALLA TAPA LASKEA OMINAISARVOT NUMEERISESTI)

TARVITAAN

1. NOLLAKOHTALAUSE

$y(x)$ JA $Y(x)$ OLKOOT DIFF. YHTÄLÖIDEN

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y(x) = 0 \quad \text{JA} \quad \frac{d^2Y}{dx^2} + Q(x)Y(x) = 0$$

RATKAISUJA. OLKOOT a JA b ($a < b$) KAKSI RATKAISUN $Y(x)$ NOLLAKOHTAA: $Y(a) = Y(b) = 0$.

JOS KAIKILLE $a \le x \le b$ $q(x) \geq Q(x)$ (JA $q(x) \not\equiv Q(x)$)

NIIN RATKAISULLA $y(x)$ ON VÄHINTÄÄN YKSI NOLLAKOHTA VÄLILLÄ $[a, b]$.

TODISTUS: OLETETAAN $y(x) \neq 0$, $a \le x \le b$, JOLLOIN PÄTEE

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{Y(x)}{y(x)}\left(y(x)\frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx}Y(x)\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left\{YY' - \frac{y'}{y}Y^2\right\}$$

$$= (Y')^2 + Y\underbrace{Y''}_{=-QY} - \underbrace{\frac{y''}{y}}_{-q}Y^2 + \frac{(y')^2}{y^2}Y^2 - 2\frac{y'}{y}YY'$$

$$= Y^2(x)\left(q(x) - Q(x)\right) + \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dy/dx}{y}Y\right)^2 \quad \text{"PICIONEN IDENTITEETTI"}$$

INTEGROIDAAN a:STA b:HEN =>

$$\Big/_a^b \frac{Y}{y}\left(yY' - y'Y\right) \overset{Y(a)=Y(b)=0}{=} 0 = \quad \leftarrow \text{RISTIRIITA, SIIS } y(x)=0 \text{ JOSSAKIN VÄLILLÄ } [a,b]$$

$$= \int_a^b dx\left\{Y^2(x)\left(q(x) - Q(x)\right) + \left(Y' - \frac{y'}{y}Y\right)^2\right\} > 0$$

2. NOLLAKOHTALAUSE

JOKAISELLA DIFF. YHTÄLÖN $\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y(x) = 0$ RATKAISULLA ON VÄLILLÄ $a \le x < \infty$ ÄÄRETTÖMÄN MONTA NOLLAKOHTAA, MIKÄLI $f(x)$ ON JATKUVA JA $f(x) \ge m^2 > 0$ TÄLLÄ VÄLILLÄ. KAHDEN PERÄKKÄISEN NOLLAKOHDAN VÄLINEN ETÄISYYS ON KORKEINTAAN π/m. TOISAALTA, JOS $f(x) \le -m^2 < 0$, $a \le x < \infty$, NIIN JOKAISELLA RATKAISULLA ON KORKEINTAAN YKSI NOLLAKOHTA VÄLILLÄ $a \le x < \infty$.

TODISTUS

VERRATAAN YHTÄLÖITÄ $y'' + fy = 0$ JA $Y'' + m^2 Y = 0$

JÄLKIMMÄISEN RATKAISU ON

$$Y(x) = A \sin m(x - \delta),$$

JONKA NOLLAKOHDAT OVAT PISTEISSÄ $x_k = \delta + \frac{k\pi}{m}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

JOS $f(x) \ge m^2$ ON YHTÄLÖN $y'' + fy = 0$ RATKAISULLA 1. NOLLAKOHTALAUSEEN MUKAAN VÄHINTÄÄN YKSI NOLLAKOHTA VÄLILLÄ $[x_k, x_{k+1}]$ (VALITAAN k S.E. $x_k \ge a$), YKSI VÄLILLÄ $[x_{k+1}, x_{k+2}]$, JNE, ELI ÄÄRETTÖMÄN MONTA NOLLAKOHTAA. KAHDEN PERÄKKÄISEN NOLLAKOHDAN VÄLI $< \pi/m$; MUUTEN VOITAISIIN δ:N SOPIVALLA VALINNALLA AIKAANSAADA, ETTEI $y(x)$:N NOLLAKOHTA OSUISI VÄLILLE $[x_{k'}, x_{k'+1}]$.

JOS TAAS $f(x) \le -m^2$ VERRATAAN YHTÄLÖITÄ $y'' + fy = 0$ JA $Y'' - m^2 Y = 0$.

JOS YHTÄLÖN $y'' + fy = 0$ RATKAISULLA OLISI KAKSI NOLLAKOHTAA x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, OLISI YHTÄLÖN $Y'' - m^2 Y = 0$ JOKAISELLA RATKAISULLA VÄHINTÄÄN YKSI NOLLAKOHTA VÄLILLÄ $[x_1, x_2]$ (1. NOLLAKOHTALAUSE). MUTTA RATKASULLA $Y(x) = e^{mx}$ EI OLE NOLLAKOHTIA LAINKAAN. RISTIRIITA.

PALATAAN S-L YHTÄLÖÖN MUODOSSA

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(Q(x) + \lambda R(x)\right) z(x) = 0 \qquad (1)$$

$R(x), Q(x)$ JATKUVIA ; $R(x) > 0 \quad a \le x \le b$

MÄÄRITELLÄÄN $\left.\begin{array}{l} Q(x) = Q(b) \\ R(x) = R(b) \end{array}\right\} \; x \ge b \qquad (2)$

DIFF. YHTÄLÖIDEN RATKAISUJEN OLEMASSAOLO- JA 1-KÄS. LAUSE $\Rightarrow$ YHTÄLÖLLÄ (1) ON JOKAISELLE λ VÄLILLÄ $[a, B]$, $B > b$ 1-KÄS. EHTOJA $z(a) = 0$, $z'(a) = 1$ TOTEUTTAVA RATKAISU $z(\lambda; x)$

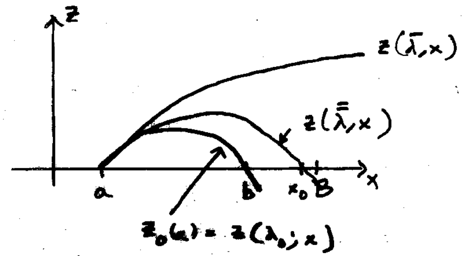
KOSKA $Q(x), R(x)$ JATKUVIA JA $R(x) > 0$ LÖYTYY AINA LUKU $\bar{\lambda}$ S.E. $Q(x) + \bar{\lambda} R(x) \le -m_1^2 < 0$ VÄLILLÄ $[a, B]$

2. NOLLAKOHTALAUSEEN MUKAAN RATKAISUILLA $z(\lambda; x)$ EI OLE TOISTA NOLLAKOHTAA $(z(\lambda; a) = 0)$ KUN $\lambda \le \bar{\lambda}$ $\Rightarrow$ EI LÖYDY OMINAISARVOJA $\le \bar{\lambda}$

ANNETAAN NYT λ:N KASVAA, JOLLEKIN $\lambda = \bar{\bar{\lambda}}$ ON

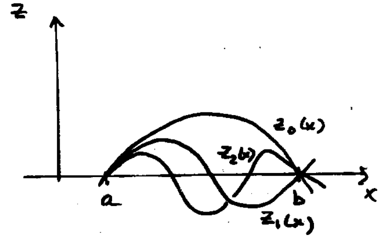
$$Q(x) + \bar{\bar{\lambda}} R(x) \ge \left(\frac{\pi}{B-a}\right)^2 = m_2^2 > 0$$

2. NOLLAKOHTALAUSE SANOO NYT, ETTÄ $z(\bar{\bar{\lambda}}, x)$:LLA ON VÄH. YKSI LISÄNOLLAKOHTA x_0 VÄLILLÄ $[a, B]$, ALUKSI $b < x_0 \le B$. KUN λ KASVAA, x_0 LÄHESTYY b:TÄ YLHÄÄLTÄ, JA KUN $\lambda = \lambda_0 < \bar{\bar{\lambda}}$, $x_0 = b$.



λ_0 ON OMINAISARVO JA $z_0(x) = z(\lambda_0; x)$ VASTAAVA OMINAISFUNKTIO, JOLLA ON NOLLAKOHDAT $x = a$, $x = b$:SSÄ MUTTA EI NIIDEN VÄLISSÄ.

ANNETAAN NYT λ:N KASVAA EDELLEEN. $z(\lambda; x)$:N 3. NOLLAKOHTA LÄHESTYY $x = b$:TÄ, JA KUN $\lambda = \lambda_1$ $\quad z(\lambda_1, b) = 0 \quad z_1(x) = z(\lambda_1, x)$ ON OMINAISFUNKTIO JOLLA ON TÄSMÄLLEEN YKSI NOLLAKOHTA VÄLILLÄ (a, b). KUN λ TAAS KASVAA, OSUU ARVOLLA $\lambda = \lambda_2$ SEURAAVA NOLLAKOHTA PÄÄTEPISTEESEEN b, $z_2(x) = z(\lambda_2; x)$ OM. FUNKTIO, 2 NOLLAKOHTAA VÄLILLÄ (a, b), JNE



HUOM. NOLLAKOHDAT KAIKKI YKSINKERTAISIA, SILLÄ JOS $z(x_0) = z'(x_0) = 0$ $\Rightarrow z(x) \equiv 0$

OMINAISARVOJEN LÖYTÄMINEN "SHOOTING-METHOD":LLA : ("AMMUTAAN")

ARVATAAN JOKIN λ_0, INTEGROIDAAN NUMEERISESTI DIFF. YHTÄLÖÄ (LISÄMÄÄRITTELYLLÄ (2)) ALKUARVOILLA $z(a) = 0$, $z'(a) = 1$.
MUUTETAAN λ:AA KUNNES NOLLAKOHTA OSUU $x = b$:HEN $(\lambda = \hat{\lambda})$
JOS NÄIN LÖYDETYLLÄ OMINAISFUNKTIOLLA ON n NOLLAKOHTAA AVOIMELLA VÄLILLÄ (a, b), PIENENNETÄÄN λ:AA KUNNES LÖYTYY OM. FUNKTIO $(n-1)$:LLÄ NOLLAKOHDALLA, JNE
SEN JÄLKEEN KASVATETAAN λ $\hat{\lambda}$:STA JA LÖYDETÄÄN MUUT OMINAISARVOT JA -FUNKTIOT

HUOM! STURMIN JA LIOUVILLEN LAUSE PÄTEE VAIN SÄÄNNÖLLISELLE S-L ONGELMALLE. SITÄ EI VOI YLEISTÄÄ KAIKKIIN SINGULAARISIIN ONGELMIIN:

VASTAESIMERKKI

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0 \qquad (1)$$

$a = 0$, $b = 1$ $\quad p(a) = 0$ SINGULAARINEN!

EHTO $u(b) = 0$, $|u(0)| < \infty$

(1) ON $x^2 u'' + 2x u' + \lambda u = 0$

YRITE $u(x) = x^p$

$\Rightarrow p(p-1) + 2p + \lambda = p^2 + p + \lambda = 0$

$\Rightarrow p = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$

1° $\lambda \neq \frac{1}{4}$ $\quad p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$, $p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ ERISUURET

YL. RATK. $u(x) = C_1 x^{p_1} + C_2 x^{p_2}$

$u(1) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$

$u(x) = C\left(x^{p_1} - x^{p_2}\right)$

$\lambda < \frac{1}{4}$, $p_2 < 0$ AINA $\rightarrow |u(x)| \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$

$\lambda > \frac{1}{4}$ $\quad \mathrm{Re}\, p = -\frac{1}{2}$ $\quad |u(x)| \sim |x|^{-1/2} \underset{\rightarrow \infty}{} $ $x \rightarrow 0$

$\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ AINA MYÖS $|u(x)| \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$ (TARKISTA!)

2° $\lambda = \frac{1}{4}$ $\quad u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

TOINEN RATKAISU SAADAAN VAKIOTA VARIOIMALLA

$u_2(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}$ $\quad \Rightarrow v(x) = \log x$

YL. RATK. $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1 + C_2 \log x\right)$

$u(1) = \frac{C_1}{\sqrt{1}} = C_1 = 0$

$\Rightarrow u(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ $\quad |u(x)| \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$

YHTÄLÖLLÄ SIIS EI OLE OMINAISARVOA.

KUITENKIN AINA PÄTEE: JOS OMINAISARVO ON OLEMASSA, SE ON REAALINEN; ERISUURTA OMINAISARVOJA VASTAAVAT OM. FUNKTIOT ORTOGONAALISIA (SEURAA $\mathcal{L}$:N ITSEADJUNGOISUUDESTA)

TOINEN FYSIIKASSA TÄRKEÄ TAPAUS, JOTA LAUSE EI KOSKE ON JAKSOLLISET REUNAEHDOT:

$$u(a) = u(b) \qquad (J)$$
$$p(a)u'(a) = p(b)u'(b)$$

("SEKAREUNAEHTO": KYTKEE $x = a$ JA $x = b$ TOISIINSA)

HUOMAA ETTÄ $\langle \mathcal{L}u | v \rangle = \langle u | \mathcal{L}v \rangle$ MYÖS REUNAEHDOILLA (J)!

ESIMERKKI

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \qquad 0 \le x \le \pi$$

KUTEN AIKAISEMMIN, MUTTA NYT:

$$u(0) = u(\pi)$$
$$u'(0) = u'(\pi)$$

JAKSOLLISET REUNAEHDOT

MERK. $\sqrt{-\lambda} \equiv \varkappa$,

YL. RATK. $u(x) = C_1 e^{\varkappa x} + C_2 e^{-\varkappa x}$

REUNAEHDOT: $C_1 + C_2 = C_1 e^{\varkappa\pi} + C_2 e^{-\varkappa\pi}$

$$\varkappa(C_1 - C_2) = \varkappa(C_1 e^{\varkappa\pi} - C_2 e^{-\varkappa\pi})$$

1° $\varkappa = 0$ KELPAA

$\Rightarrow \lambda = 0$ OM. ARVO, OM. FUNKTIO $u_0(x) = C$ (vakio)

2° $\varkappa \neq 0$: SAAN JAKAA $\varkappa$:N POIS $\Rightarrow$

$$(1 - e^{\varkappa\pi})C_1 + (1 - e^{-\varkappa\pi})C_2 = 0$$
$$(1 - e^{\varkappa\pi})C_1 - (1 - e^{-\varkappa\pi})C_2 = 0$$

RATKAISU ERI KUIN $C_1 = C_2 = 0$ OLEMASSA, JOS RYHMÄN DETERMINANTTI $= -2(1 - e^{\varkappa\pi})(1 - e^{-\varkappa\pi}) = 0$

ELI $e^{\varkappa\pi} = 1 \Rightarrow \varkappa\pi = 2\pi n i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\Rightarrow \lambda_n = -\varkappa^2 = 4n^2$$

OMINAISARVOA $\lambda = 4n^2$ VASTAA KAKSI RIIPPUMATONTA OMINAISFUNKTIOTA

$n = 0$ ANTAA JO SAADUN OM. FUNKTION $u_0 =$ vakio

$\lambda = 4n^2 \qquad u_n = e^{2inx}, \quad u_{-n} = e^{-2inx}$

TAI NIIDEN REAALISET YHDISTELMÄT

$$u^{(1)}_{4n^2} = \cos(2nx)$$
$$u^{(2)}_{4n^2} = \sin(2nx)$$

OMINAISARVO $\lambda = 4n^2$, $n \neq 0$, ON SIIS KAHDESTI DEGENEROITUNUT

HUOM. EROT: $\lambda = 0$ NYT OMINAISARVO

$\lambda = 4n^2$ DEGENERAATIO

MONELLE SINGULAARISELLE S-L ONGELMALLE JA/TAI SEKAREUNAEHTO-ONGELMALLE VOIDAAN JOHTAA S-L:N LAUSEEN KALTAISIA TULOKSIA (VARIAATIOLASKUN AVULLA)

(KATSO R. COURANT JA D. HILBERT: METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS, VOL. I LUKU 6)