3. AINEKIN AALLOIKSI

SÄTEILY : KLASS. JATKUVA AALTO

$\longrightarrow$ DISKREETTI "KVANTTIAALTO" FOTONI

- VOI KÄYTTÄYTYÄ TÖRMÄYKSISSÄ KUTEN HIUKKANEN (KINEM.: ENERGIAN, IMPULSSIN, SUUNNAN MUUTOS)
- ABSORBOITUU JA EMITOITUU YKSIN KAPPALEIN, KVANTTEINA

HIUKKASOMINAISUUKSIA

3.1 AINEAALTOHYPOTEESI

DE BROGLIE : AINEELLA PUOLESTAAN MYÖS AALTOLUONNE.

AALLONPITUUS KUTEN SÄTEILYSSÄ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad \text{(EPÄRELAT.)}$$

MAKROSKOOPPISILLA KAPPALEILLA LIIAN LYHYT HAVAITTAVAKSI

ESIMERKKI: 100 eV:N ELEKTRONI

$p = \sqrt{2 m_e K} = \sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 100\,\text{eV} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 5.4 \cdot 10^{-24}\,\text{kgm/s}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}{5.4 \cdot 10^{-24}\,\text{Js/m}} = 1.2 \cdot \underbrace{10^{-10}\,\text{m}}_{\text{Å}} = 0.12\,\text{nm}$

[illegible]

AALTO $\Longrightarrow$ SEISOVA AALTO $\Leftrightarrow$ SIDOTTU TILA (DISKREETTI TAAJUUS)

BOHRIN YMPYRÄRADALLA EHTO KEHÄ = $n\lambda$ ELI

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p} \Rightarrow L = pr = n\,h/2\pi = n\hbar$$

BOHRIN KVANTTIEHTO IMPULSSIMOMENTILLE

OLTAVA TÄYSI MÄÄRÄ AALLONPITUUKSIA KONSTRUKTIIVISEEN INTERFERENSSIIN

YKÄ: AALTO SOVELLETTUNA KLASSISEEN RATAAN

AALLON LUONNE EPÄSELVÄ, MITEN YKSI "HIUKKANEN AALTOILEE"

ESIMERKKI : BRAGGIN KULMAT DAVISSON-GERMER KOKEESSA ?

IMPULSSI $p = \sqrt{2 m_e K}$

AALLONPITUUS $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e K}}$

JA $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{h}{2d\sqrt{2 m_e K}}$

SIRONTA NIKKELISTÄ ($d = 0.091\,nm$)

ELEKTR. ENERGIAT 40 eV, 54 eV, 68 eV

54 eV

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{6.63\cdot 10^{-34}\,Js}{2\cdot 0.091\cdot 10^{-9}\,m\sqrt{2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 54\,eV\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\,J/eV}}$$

$$= 0.918 \Longrightarrow \varphi = 46.9^\circ \quad \approx OK$$

68 eV

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cdots = 0.818 \Longrightarrow \varphi = 70.3^\circ$$

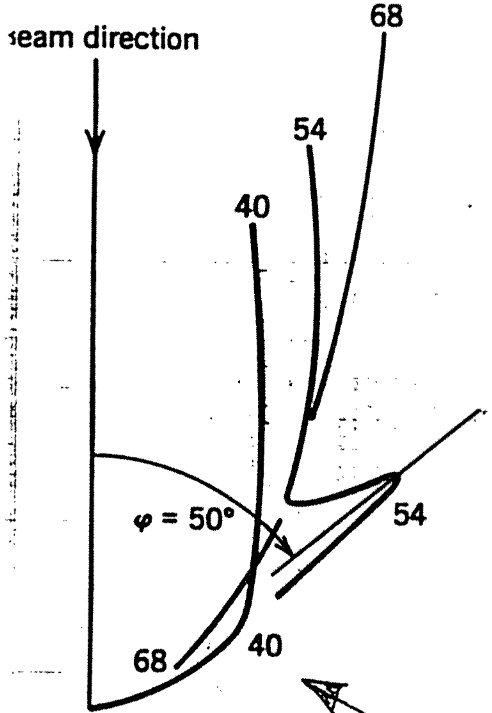
PIIKKI LIIAN PIENI ?

40 eV

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cdots = 1.066$$

EI RATKAISUA, EI BRAGGIN PIIKKIÄ

3.2. INEAALTOJEN HAVAITSEMINEN



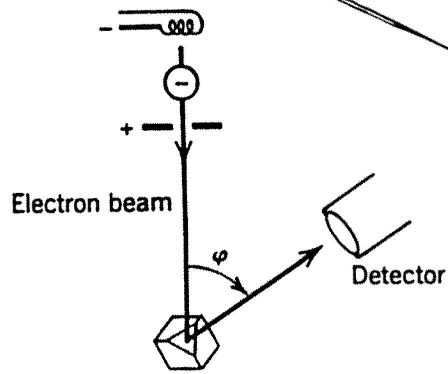
DAVISSON-GERMER:
BRAGGIN SIRONTA KIDEHILASTA ELEKTRONEILLA

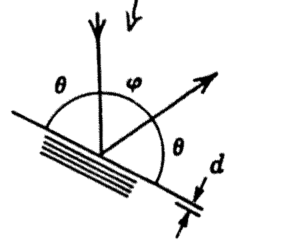
$\Longrightarrow$ DIFFRAKTIO-PIIKKI

SAMA DE BROGLIE AALLONPITUUS KUIN VASTAAVILLA RÖNTGENSÄTEILLÄ

BRAGGIN EHTO $\frac{\lambda}{2d} = \sin\theta = \cos\frac{\varphi}{2}$

$\varphi = \pi - 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$

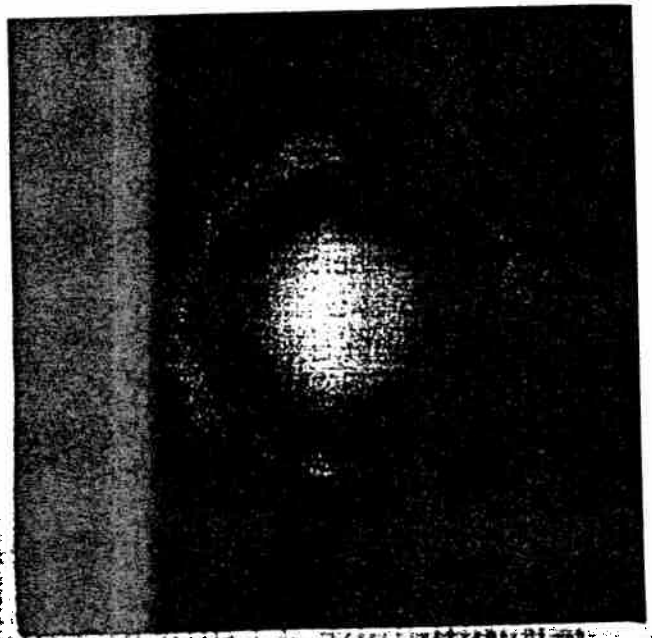




Bragg planes in the crystal

MYÖS ESIM. NEUTRONEILLA !

diffraction pattern from one of Thomson's experiments.



NUOREMMAN THOMSONIN KOE:

DIFFRAKTIOSIRONTA PIENISTÄ KITEISTÄ

– KUTEN VALO (TAI RÖNTGEN) PIENESTÄ AUKOSTA TAI PIENEN ESTEEN YMPÄRI

KAKSOISRAKOKOKEET:

YOUNGIN TYYPPINEN INTERFERENSSI MYÖS ELEKTRONEILLA

– MYÖS KOMPLEKSISILLA HIUKKASILLA (JOPA FULLEREENEILLA)

3.3. "HIUKKASTEN" KAHDET KASVOT — DUALITEETTI

DIFFRAKTIO NÄYTTÄÄ AALTOLUONTEEN, KUN AALLONPITUUS OIKEASSA SUHTEESSA LAITTEISTOON

(ESIM. SIRONTA HILASSA: DE BROGLIEN AALLONPITUUS ≈ HILAVAKIO) BM?

MYÖS AINEELLISILLA (SO. VARATUILLA, MASSALLISILLA) OLIOILLA

SÄTEILYLLÄ (KLASS. AALTOJA) MYÖS "HIUKKASLUONNE" (DISKREETTEJÄ)

"HIUKKAS-" TAI "AALTO"-LUONNE EI YKSINÄÄN RIITÄ; OLIOILLA ON MOLEMMAT TIETYSSÄ MIELESSÄ — DUALITEETTI

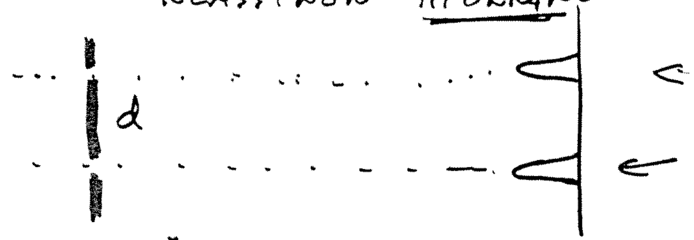
USEIN SANOTAAN NÄITÄ PIIRTEITÄ TOISIAAN TÄYDENTÄVIKSI (KOMPLEMENTAARISIKSI). NIILLÄ EI OLE RISTIRIITAA KOSKA NE EIVÄT YHTÄ AIKAA NOUSE ESIIN (SAMASSA KOKEESSA)

⟶ KVANTTIHIUKKANEN

VALON AALTOLUONNE YOUNGIN KAKSOISRAKOKOKEESSA: ERI RAKOJEN LÄPI TULEVIEN KOMPONENTTIEN INTERFERENSSI KUN NIIDEN E[illegible]ISYYS ≈ AALLONPITUUS

⟶ MYÖS ELEKTRONEIHIN

KLASSINEN HIUKKANEN

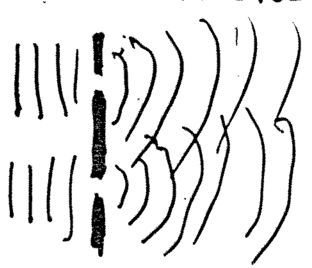


PÄTEE MAKROSKOOPPISIIN TILANTEISIIN (TAI JOS MUUTEN $d \gg \lambda$)
SELVÄÄ KUMMASTA RAOSTA KUNKIN JAKAUMAMAKSIMIN HIUKKASET TULIVAT

AALLOILLA EI SELVÄÄ:
AALTORINTAMA AIHEUTTAA KUMMANKIN AUKON MUUTTUMISEN PALLOAALTOJEN (TAI YMPYRÄAALTOJEN) KESKUKSIKSI JA NÄISTÄ TULEVAT AALLOT INTERFEROIVAT

NÄIN TOIMII KVANTTIHIUKKANEN

JOS TOINEN AUKKO SULJETAAN → EI INTERFERENSSIÄ



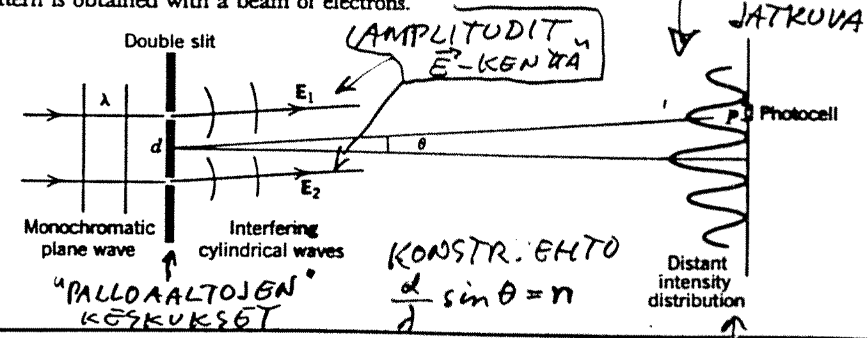
ERIKSEEN AUKOTETTUNA JAKAUMA ILMAN INTERFERENSSIÄ

INTERFERENSSI VAATII MOLEMMAT:
SILLOIN JOPA ELEKTRONI "KULKEE MOLEMPIEN LÄPI". JOS REITTIÄ SEURATAAN
→ EI INTERFERENSSIÄ

ENERGIAVUOTIHEYS^2
KLASSINEN: DIFFR. $I \sim c\epsilon_0 E_p$ (KESKIM.)

Figure 4-5
Interference of electromagnetic waves in a double-slit experiment. The same interference pattern is obtained with a beam of electrons.

JATKUVA



INTERFERENSSI
$(\bar{E}_1+\bar{E}_2)^2 = \bar{E}_1^2+\bar{E}_2^2+2\bar{E}_1\cdot\bar{E}_2$
YKSITTÄISET
INTERFERENSSI-TERMI

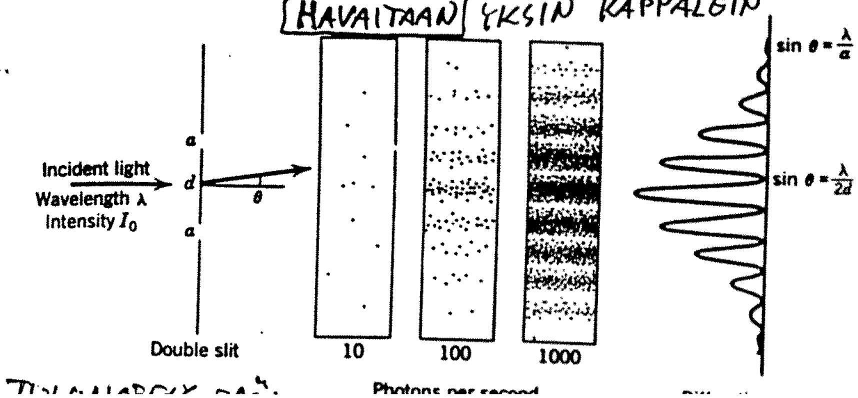
KVANTITETTU SÄTEILY
FOTONEJA, KOHTIOSSA
FOTONIEN KAPPALEINTENSITEETTI I_p
→ ENERGIAVUOTIHEYS

$$h\nu I_p = c\epsilon_0 E_p^2$$

$$4I_0\cos^2\frac{\phi_d}{2}\,\frac{\sin^2(\phi_a/2)}{(\phi_a/2)^2},$$ (AALTO-OPTIIKASTA)

where $\phi_d = (2\pi d/\lambda)\sin\theta$ and $\phi_a = (2\pi a/\lambda)\sin\theta$.

$\boxed{\text{HAVAITAAN}}$ YKSIN KAPPALEIN



$\vec{E}$-KENTTÄ MITATTAVA SUURE

$\longrightarrow E^2$ ENERGIAINTENSITEETTI JAKAUMA

$\propto$ FOTONIEN INTENSITEETTIJAKAUMA

(HAVAINTOTODENNÄKÖISYYSJAKAUMA)

STATISTINEN

$\bar{E}(\bar{r},t)$ "AALTOFUNKTIO"

TOTEUTTAA MM. AALTOYHTÄLÖN

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(KUKIN KOMPONENTTI E_x, E_y, E_z)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

SÄTEILYN LIIKEYHTÄLÖ: SIIS SEN LIIKKUMINEN AALTONA

HAVAINTO HIUKKASINA:

- ABSORPTIO VALOKUVAEMULSION MOLEKYYLIIN
- ABSORPTIO DETEKTORIIN
- COMPTON SIRONTA, JOKA ALOITTAA VARAUSPURKAUKSEN
- FOTOSÄHKÖINEN ILMIÖ
- ...

VAIKKA AALTOYHTÄLÖ ANTAAKIN KENTÄNVOIMAKKUUDEN AJAN JA PAIKAN FUNKTIONA YKSIKÄSITTEISESTI, FOTONIEN HAVAITSEMINEN DISKREETTEINÄ OLIOINA LUONTEELTAAN STATISTISTA

ENEMMÄN VAHVAN KENTÄN ALUEELLA

ANALOGIA AINEELLISIIN HIUKKASIIN:

$\vec{E}(\bar{r},t) \longrightarrow \Psi(\bar{r},t)$

AALTOFUNKTIO, JOKA TOTEUTTAA JONKINLAISEN AALTOYHTÄLÖN

$\Psi(\bar{r},t)$ AINEAALLON AMPLITUDINA

ADDITIIVINEN ($\Psi_1, \Psi_2 \rightarrow \Psi_1 + \Psi_2$)

KUTEN $\vec{E}$-KENTÄT (SUPERPOSITIO)

KUTEN $\vec{E}^2$ MYÖS $\Psi^2(\bar{r},t)$ ANTAA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAN (JONKINLAINEN AINEAALTOJEN TAI HIUKKASTEN INTENSITEETTI)

KAHDEN AALLON SUMMAN INTENSITEETTI

$$(\Psi_1+\Psi_2)^2 = \underbrace{\Psi_1^2 + \Psi_2^2}_{\text{YKSITTÄISET ("KLASS.")}} + \underbrace{2\Psi_1\Psi_2}_{\text{INTERFERENSSI (QM)}}$$

ESIM. KAHDEN RAON LÄPI TULEVIEN AALTOJEN SUMMA

KÄSITTEELLINEN HANKALUUS KLASSISESSA JAOTTELUSSA: LIIKKEEN MÄÄRÄYTYMINEN JA HAVAINNOINTI "ERI MAAILMOISTA"

3.4. MITTAUSTEN EPÄV[illegible]MUUS JA EPÄTARKKUUS

KLASSINEN MEKANIIKKA:

LIIKEYHTÄLÖ NEWTONIN III $\ddot{\vec{p}} = F$

\+ ALKUEHDOT ⟹ TARKKA RATA

DETERMINISTINEN TEORIA KAPPALEEN LIIKKEELLE, "HAVAINTO" VOI OLLA JATKUVA, EI HÄIRITSE

KLASSISET AALLOT:

LIIKEYHTÄLÖ AALTOYHTÄLÖ + ALKUEHDOT

⟹ AALLON KEHITYS;

EI RATAA, AALTO KAIKKIALLA TAI AINAKIN LAAJALLA ALUEELLA

MODERNI FYSIIKKA, KVANTTIHIUKKASET:

LIIKEYHTÄLÖT AALTOYHTÄLÖITÄ (KUTEN KLASS. AALLOT)

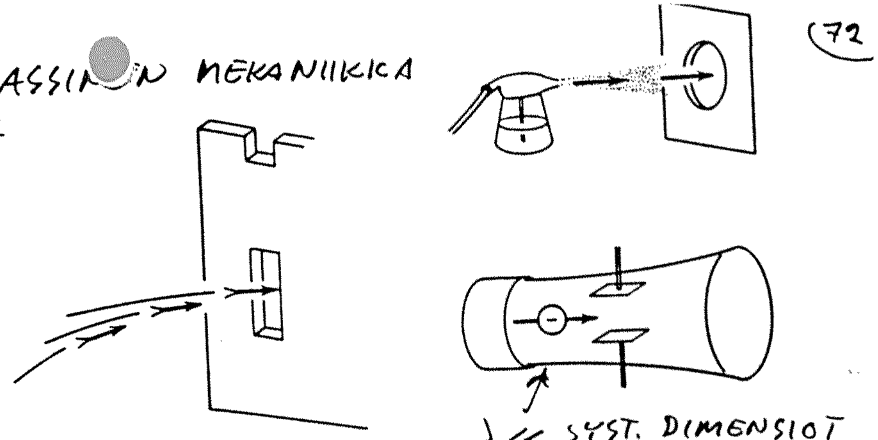
EI RATAA VAAN LEVINNYT AALTOFUNKTIO $\psi(\bar{r},t)$ JOKA KEHITTYY AALTOYHTÄLÖNSÄ MUKAAN.

HAVAITSEMINEN KUITENKIN TIUKASTI LOKAALI HIUKKASMAINEN

⟹ DETERMINISMI ERILAINEN

AALTO AALTONA DETERMINISTINEN (JA AALTOFUNKTIO) MUTTA ME YRITÄMME MITATA [illegible]

KLASSI[illegible]N MEKANIIKKA OK

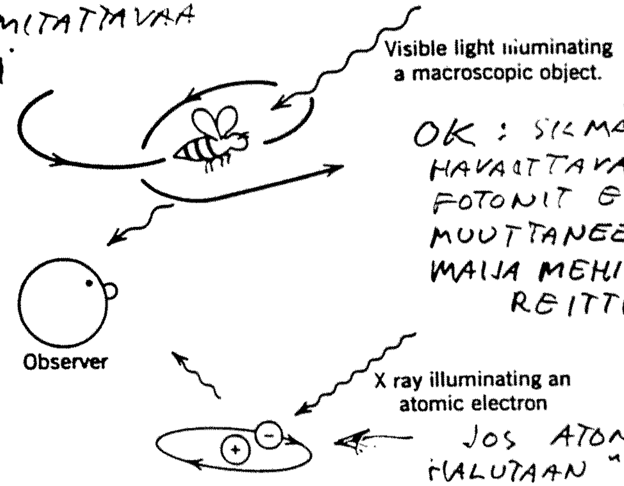


$\lambda \ll$ SYST. DIMENSIOT

⟹ TULOKSENA NÄKÖJÄÄN SATUNNAISIA (OIK. STATISTISIA) MITTAUSTULOKSIA (TODENNÄKÖISYYSJAKAUMA) BM?

KLASS. MEKANIIKKA KUN $h \to 0$ TAI SYSTEEMI MAKROSKOOPPINEN (TAI KYLLIN MASSIIVISIA HIUKK.)

KLASSINEN MITTAUS: OLETUSARVOISESTI EI HÄIRITSE MITATTAVAA SYSTEEMIÄ



OK: SILMÄSSÄ HAVAITTAVAT FOTONIT EIVÄT MUUTTANEET MAIJA MEHILÄISEN REITTIÄ

JOS ATOMI HALUTAAN "NÄHDÄ"

VOI HAJOTTAA KOKO ATOMIN ⟵ TARVITAAN $\lambda \sim$ ATOMIN KOKO

HEISENBERG: KITEYTTI MITTA[illegible]EN HÄIRITSEVÄN VAIKUTUKSEN EPÄTARKKUUSPERIAATTEESEEN

TOISTENSA KONJUGAATTISUUREET (x, p_x) [VAST. (y, p_y), (z, p_z)] VOIDAAN MITATA SAMANAIKAISESTI KORKEINTAAN NIIN TARKASTI ETTÄ EPÄTARKKUUKSILLE (KESKIHAJONTA) PÄTEE

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (\hbar = h/2\pi)$$

(OSOITETAAN QM I:SSÄ)

TS: KUN TOISEN TARKKUUS TULEE HYVIN SUUREKSI, TOISEN TARKKUUS HEIKKENEE

ESIMERKKI: 1g KAPPALE PAIKALLISTETTU 0.1 mm:N TARKKUUDELLA

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}} = 0.53 \cdot 10^{-30}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{0.53 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg\,m/s}}{10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 5.3 \cdot 10^{-28}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

MAKROSKOOPPISILLA KAPPALEILLA EPÄTARKKUUS MITÄTÖN JA HAVAITTAVUUDEN ULKOPUOLELLA

YRITETÄÄN MÄÄRITTÄÄ HIUKKASEN (AALLON) PAIKKA (y-SUUNNASSA) JA IMPULSSI LASKEMALLA SE KAPEAN RAON LÄPI. HIUKKASILLA OLETETAAN IMPULSSI OIKEALLE x-SUUNTAAN OLEVAN p.

$\Rightarrow$ TULEVIEN AALTOJEN AALLONPITUUS $\lambda = h/p$

RAON TAKANA SYNTYY DIFFRAKTIOJAKAUMA. EHTO ENSIMMÄISELLE MINIMILLE:

$\sin\theta = \lambda/a$ ← RAON LEVEYS

TÄMÄ MÄÄRITTELEE TÄMÄN KAUKAISEN INTENSITEETTIJAKAUMAN LEVEYDEN.

ILMEISESTI RAON LEVEYS ANTAA Δy:N RAON KOHDALLA $\Delta y = a$.

TOISAALTA KUN MYÖHEMMIN JAKAUMALLA LEVEYS SUUNTAAN θ ON ILMEISESTI OLTAVA y-SUUNTAISTA IMPULSSIAKIN JAKAUMANA, MAX.

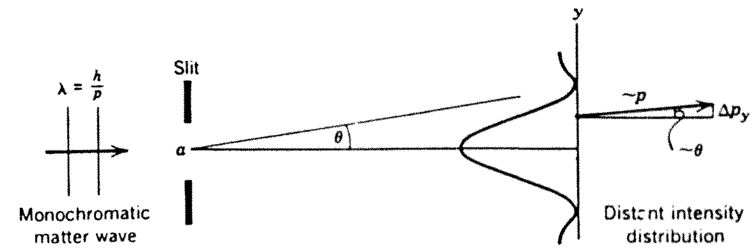
$\Delta p_y = p \sin\theta = p\lambda/a$ | TARKENTAMALLA y:T. Δp_y KASVAA $\propto a^{-1}$

TULOKSI SAADAAN

$$\Delta y \, \Delta p_y = a \cdot \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{a} = h \geq \frac{\hbar}{2}$$

X:ÄÄ JA p_x:ÄÄ EI VOIDA TUNTEA MIELIVALTAISEN TARKASTI YHTÄ AIKAA. EIKÄ SELLAISTA ALKUTILAA VOIDA PREPAROIDA.

Figure 4-10
Diffraction of a beam of particles by a single slit.



ESIMERKKI: MAKROSKOOPPISESSA MITASSA HEISENBERGIN EPÄTARKKUUS MITÄTÖN. ENTÄ MIKROSKOOPPISESSA? LOKALISOIDAAN ELEKTRONI MIKROSKOOPPISEEN TILAAN $\Delta x = 10^{-10}\,m = 1\,\text{Å}$

TÄLLÖIN Δp (NETTONOLLAN YMPÄRILLÄ) KASVAA: OLTAVA MINIMIMÄÄRÄ $p = \Delta p = \hbar/2\Delta x$ IMPULSSIA JA VASTAAVASTI LIIKE-ENERGIAA

TIUKKA LOKALISOINTI MAKSAA ENERGIAA

$$p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.05\cdot 10^{-34}\,Js}{10^{-10}\,m} = 1.05\cdot 10^{-24}\,kg\,m/s$$

$$K = \frac{(1.05\cdot 10^{-24}\,kg\,m/s)^2}{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\,J/eV} = 3.8\,eV$$

SUURUUSLUOKALTAAN VETYATOMIN LUOKKAA.

VOI MYÖS ARVIOIDA POTENTIAALIA:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

AJATELLAAN EPÄTARKKUUDEN PÄTEVÄN r:N JA p:N VÄLILLÄ (RADIAALINEN VARAUSASTE) JA MOLEMMAT OVAT OMAT EPÄTARKKUUTENSA

$$\Rightarrow \quad r\cdot p = \hbar/2$$

$$r = \hbar/2p$$

$$\therefore \quad E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2\,2p}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$$

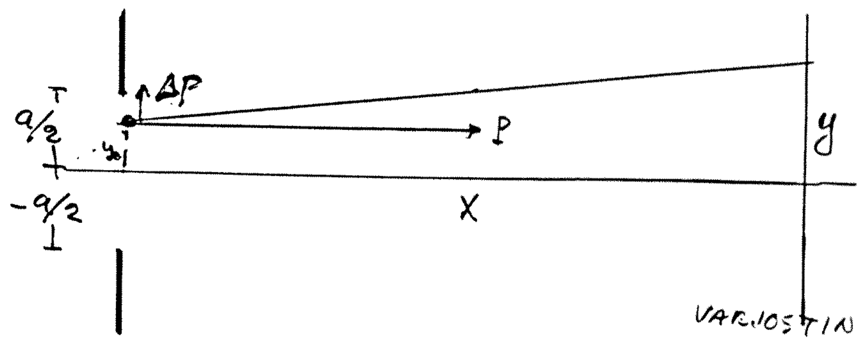
ETSITÄÄN PERUSTILAA $\Rightarrow$ MINIMOIDAAN E

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} = 0 \qquad p_0 = \frac{2e^2 m}{4\pi\varepsilon_0\hbar} \quad \text{MINIMISSÄ}$$

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{2e^2 m}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 - \frac{2e^2\cdot 2e^2 m}{4\pi\varepsilon_0\hbar\cdot 4\pi\varepsilon_0\hbar} = -2\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^2 mc^2$$

$$= 4\,E_1(H)$$

ESIMERKKI: ILMEISESTI EDELLÄ VOIDAAN RAKO LEVITTÄÄ NIIN LEVEÄKSI, ETTÄ DIFFRAKTIO MITÄTÖN JA RAON KUVAN LEVEYS SAMA KUIN RAON. (JA TÄMÄ VOI OLLA MIELIVALTAISEN LEVEÄ) TOISAALTA KAVENTAMALLA RAKOA, DIFFRAKTIO LEVENTÄÄ RAON KUVAA. ILMEISESTI ANNETULLE λ ON OLEMASSA KUVAN MINIMILEVEYS



MAKSIMIPOIKKEAMAA VARJOSTIMELLA ARVIOIDAAN EPÄTARKKUUSPERIAATTEELLA

$$\Delta p = \hbar/a$$

POIKKEAMA Y-SUUNNASSA ON SITTEN

$$y = y_0 + \frac{\Delta p}{m} t = \frac{a}{2} + \frac{\hbar}{ma} t \leftarrow \text{AIKA SAAVUTTAA VARJOSTIN} = \frac{mx}{p}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{\hbar}{ma}\frac{mx}{p} = \frac{a}{2} + \frac{\hbar x}{ap}$$

MINIMIÄHÄN HAETAAN: $\frac{dy}{da} = \frac{1}{2} + \frac{\hbar x}{a^2 p} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hbar x}{a^2 p} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{2\hbar x}{p} \qquad a_0 = \sqrt{\frac{2\hbar x}{p}}$$

$$\therefore \quad y = \frac{a_0}{2} + \frac{\hbar x}{a_0 p} = \sqrt{\frac{\hbar x}{2p}} + \frac{\hbar x}{\sqrt{\frac{2\hbar x}{p}}\,p} = \sqrt{\frac{\hbar x}{2p}} + \sqrt{\frac{\hbar x}{2p}} = a_0$$

MYÖS VOI ...

3.5. AALLOISTA AALTOPAKETTEIHIN

TARKASTELLAAN SINIAALTOJEN KÄYTTÄYTYMISTÄ YHDESSÄ ULOTTUVUUDESSA, NIIDEN EPÄLOKAALISUUTTA JA MAHDOLLISTA LOKALISOITUMISTA AALTOPAKETEIKSI.

AALTOYHTÄLÖN

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

AALLON ETENEMISNOPEUS (VAIHENOPEUS)

YLEINEN RATKAISU ON

$$\psi = B\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) + A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)$$

SIJOITUS YHTÄLÖÖN $\Rightarrow$

$$-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi = \frac{1}{v^2}\cdot(2\pi\nu)^2 \Rightarrow \underline{\underline{v = \nu\lambda \equiv v_\phi}}$$

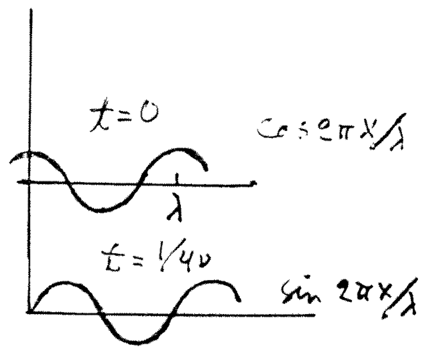
A JA B ALKUEHDOISTA. ESIM. JOS HETKELLÄ $t=0$ TIEDETÄÄN AALLON OLEVAN MAKSIMISSAAN PISTEESSÄ $x=0$

$$\Rightarrow \quad \psi = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) \equiv A\cos(kx - \omega t)$$

(MODULO λ X:N SUHTEEN)

AALTOLUKU

KULMA-TAAJUUS (L. KULMA-NOPEUS)



YLEISESTI AALLON ETENEMINEN NIIN, ETTÄ SEN VAIHE = VAKIO ANTAA ETENEMISNOPEUDEN TAI "RINTAMAN" ("LIIKUT AALLONHARJALLA")

SIIS X KASVAA t:N KASVAESSA $\Rightarrow$ AALTO LIIKKUU POSITIIVISEEN X:N SUUNTAAN

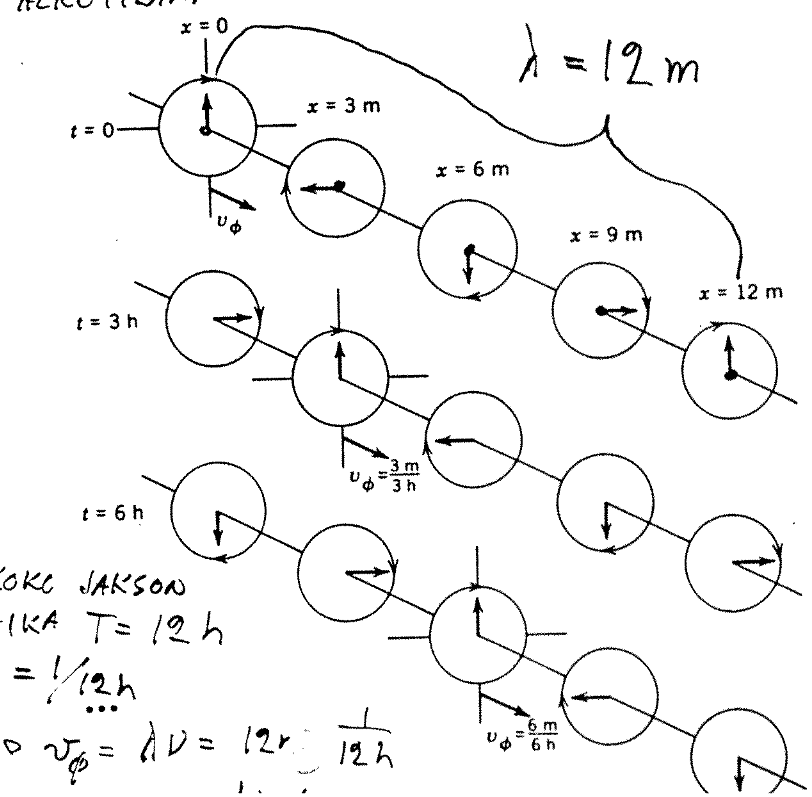
t:N KERROIN: $\omega/k = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = v_\phi$ (VAIHE)NOPEUS

YLEISTYS KOLMEEN ULOTTUVUUTEEN:

ARGUMENTTI $kx - \omega t \longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ (SUUNTAAN $\vec{k}$)

AALTOANALOGIA PAIKALLAAN PYSYVILLÄ KELLOILLA. KUNKIN KELLON "AIKA" EDUSTAA AALLON VAIHETTA K.O. PISTEESSÄ

"AALTO" ALKUTILANNE



AALTO "KULKENUT" $\lambda/2$ ELI VAIHE MUUTTUNUT MERKIN VAIHDON VERRAN

KOKO JAKSON AIKA $T = 12$ h

$\nu = 1/12$ h

...

$\Rightarrow v_\phi = \lambda\nu = 12$ m $\cdot \frac{1}{12\text{ h}}$

SINI- JA KOSINIFUNKTIOIDEN (+AALTOJEN) ESITYS KOMPLEKSILUVUILLA USEIN KÄYTÄNNÖLLINEN.

TRIGONOMETRISET KAAVAT → EKSPONENTTIFUKTIOIDEN KERTOLASKUKSI

AALTOYHTÄLÖN RATKAISU YHTÄ HYL:IN

$$\Psi = C e^{i(kx-\omega t)} + D e^{-i(kx-\omega t)}$$

TOISIN SANOEN ESIM. $\cos\{ \sin \} (kx-\omega t)$ VOIDAAN ESITTÄÄ

$$\cos(kx-\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)}\right)$$

$$\sin(kx-\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(kx-\omega t)} - e^{-i(kx-\omega t)}\right)$$

⇒ ALKUPERÄINEN YLEINEN RATKAISU →

$$A\frac{1}{2}\left(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)}\right) + \frac{B}{2i}\left(e^{i(kx-\omega t)} - e^{-i(kx-\omega t)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(A-iB)\, e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}(A+iB)\, e^{-i(kx-\omega t)} \quad \in \mathbb{R}$$

Y.O. MUOTOA KUN $C = \frac{1}{2}(A-iB)$, $D = \frac{1}{2}(A+iB) \quad \in \mathbb{C}$

AALTOYHTÄLÖSSÄ TOISET DERIVAATAT ⇒ k^2, ω^2

SUHTEELLINEN MERKKI MÄÄRÄÄMÄTÖN:

MYÖS FUNKTIONAALISESTI SAMANLAISET RATKAISUT, MUTTA $kx-\omega t \longrightarrow kx+\omega t$, ESIM.

NYT VAKIOARGUMENTILLE $kx+\omega t = \phi_0$

$$\Rightarrow x = (\phi_0 - \omega t)/k$$

MENEE NEGATIIVISEN X:N SUUNTAAN

YLLÄ VAIN YKSI JA TARKKA λ ⇒ TARKKA p

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$ EI EPÄTARKKUUTTA Δp

⇒ $\Delta x = \infty$ TÄYSIN LOKALISOITUMATON (VAKIOJAKAUMA)

LOKALISOITUMISTA VOI LÄHESTYÄ SUPERPONOIMALLA KAKSI ERI AALLONPITUUKSISTA JA TAAJUUKSISTA AALTOA (KESKIARVO k, ω; EROTUS $2\delta k$, $2\delta\omega$)

$$\Psi = A\cos[(k+\delta k)x - (\omega+\delta\omega)t] + A\cos[(k-\delta k)x - (\omega-\delta\omega)t]$$

$$= A\,\mathrm{Re}\left\{e^{i[(k+\delta k)x-(\omega+\delta\omega)t]} + e^{i[(k-\delta k)x-(\omega-\delta\omega)t]}\right\}$$

$$= A\,\mathrm{Re}\left\{\underbrace{\left[e^{i(\delta kx-\delta\omega t)} + e^{-i(\delta kx-\delta\omega t)}\right]}_{2\cos[\delta kx-\delta\omega t]} e^{i(kx-\omega t)}\right\}$$

$$= 2A\cos(\delta kx - \delta\omega t)\,\mathrm{Re}\left[e^{i(kx-\omega t)}\right]$$

$$= 2A\cos(\delta kx-\delta\omega t)\cos(kx-\omega t)$$

HIDAS MUUTOS — NOPEA OSKILL. JOS $\delta k \ll k$, $\delta\omega \ll \omega$

MODULOIVA AALTO JONKA RAJOITTAMANA NOPEAMMAT OSKILLAATIOT TAPAHTUVAT

"SYKKIVÄ" AALTO

ALKUPER. KESKITAAJUUS

VERHOAALLON (SYKKEEN) ETENEMISNOPEUS

RYHMÄNOPEUS

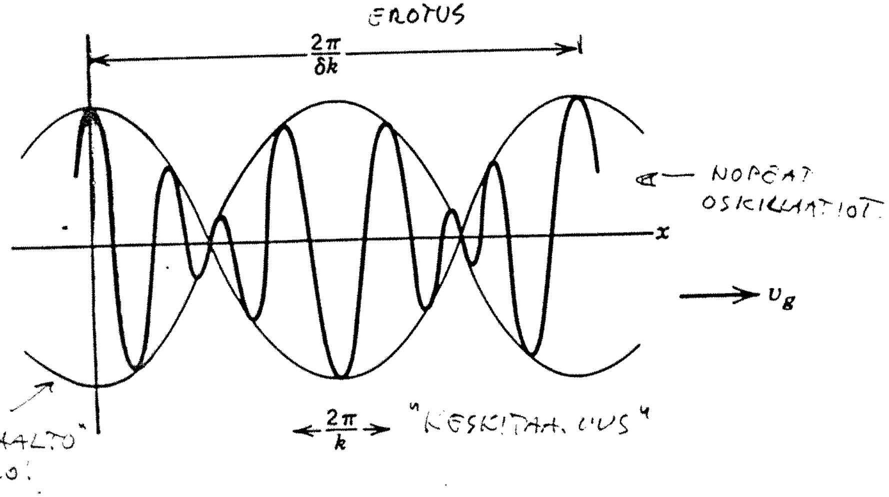
$$v_g = \frac{\delta\omega}{2\pi}\frac{2\pi}{\delta k} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \neq \frac{\omega}{k} \text{ TAI } \frac{\omega\pm\delta\omega}{k\pm\delta k}$$

ν λ

5

ition of two monochromatic waves with different wave numbers and freq
; $\omega + \delta\omega$) and ($k - \delta k, \omega - \delta\omega$). The composite system propagates with gr
/δk.

(81



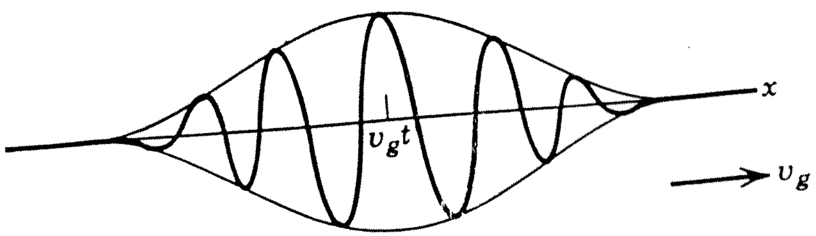
NÄHDÄÄN JONKINLAISTA LOKALISOITUMISTA SYKKEISIIN (JOTKA ETENEVÄT ERI NOPEUDELLA)

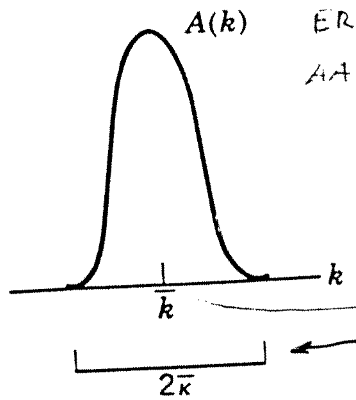
ENEMMÄN YKSITYISKOHTIA TAI TERÄVYYTTÄ VERHOAALTOON VOI SAADA LISÄÄMÄLLÄ AALTOJA SUPERPOSITIOON. SILTI: ÄÄRELLINEN SUPERPOSITIO JAKSOLLISISTA FUNKTIOISTA AINA JAKSOLLINEN ⇒ EI TÄYTÄ LOKALISOITUMISTA

TODELLINEN AALTOPAKETTI SYNTYY VASTA JATKUVASTA TAAJUUKSIEN SUPERPOSITIOSTA

- FOURIER-INTEGRAALI

AALTOPAKETTI (LOKALISOITUNUT) (82





ERI AALTOJEN AMPLITUDI AALTOLUVUN k FUNKTIONA

AMPLITUDIN MAKSIMI $\bar{k}$:SSA, TÄRKEIN KONTRIBUUTIO

AALTOLUKUJAKAUMAN "LEVEYS"

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

RYHMÄNOPEUS (PAKETIN NOPEUS) VOI TAAS OLLA ERILAINEN KUIN VAIHENOPEUS:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{\bar{k}} = \frac{d}{dk}(k v_\phi) = \left(v_\phi + k\frac{dv_\phi}{dk}\right) \neq v_\phi$$

MAKS.

JOS v_ϕ RIIPPUU k:STA

ESIM. VALON NOPEUS TYHJÖSSÄ c = VAKIO
⇒ MIKÄ TAHANSA RYHMÄNOPEUS = VAIHENOPEUS

VÄLIAINEESSA TAITEKERROIN RIIPPUU λ:STA ELI k:STA ⇒ $v_g \neq v_\phi$ DISPERSIO

KUTAKIN k VASTAA $\omega(k)$ MUTTA MIKÄ ON YHTEYS? JOS KÄYTETÄÄN EINSTEININ FOTONI-ENERGIAA $E = h\nu = \hbar\omega$ JA $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{\bar{k}} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)}\Big|_{\bar{k}} = \frac{dE}{dp}\Big|_{\bar{p}}$$

MASSALLISILLA (EPÄREL.) HIUKKASILLA $E = \frac{p^2}{2m}$

$$\Rightarrow v_g = \frac{dE}{dp}\Big|_{\bar{p}} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right)\Big|_{p} = \frac{\bar{p}}{m}$$

ILMEISESTI PAKETIN NOPEUS OLISI HIUKKASEN NOPEUS.

AALTOLUKUJAKAUMALLA KANNATTAA LEIKKIÄ PITEMPÄÄNKIN:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk \qquad k = \bar{k} + \varkappa$$

$$= e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\bar{k}+\varkappa)\, e^{i(\varkappa x - \Delta\omega t)}\, d\varkappa$$

M?

$\bar{\omega} = \omega(\bar{k})$

$\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}$

k:N FUNKTIO

JOS $A(k)$ KAPEA ($\bar{\varkappa}$ PIENI), INTEGRAALISSA KONTRIBUUTIO VAIN PIENILLÄ $\varkappa$

$\Rightarrow$ x SAA OLLA ISO ENNEN KUIN $e^{i\varkappa x}$ POIKKEAA 1:STÄ PALJON (VARSINKAAN VAIHTAISI MERKKIÄ)

$\Rightarrow$ $\psi(x,t)$ HUOMATTAVA ISOHKOILLA x

SIIS PIENI $\Delta k \Rightarrow$ ISO Δx

JOS $A(k)$ LAAJA (ISO $\bar{\varkappa}$) JA SILEÄ

$e^{i\varkappa x}$ VAIHTELEE MERKKIÄ PIENEMMILLÄ x:LLÄ JA INTEGRAALISSA PALJON KUMOUTUMISTA.

$\Rightarrow$ $\psi(x,t)$ PIENENEE NOPEASTI x:N KASVAESSA

TS: SUURI $\Delta k \Rightarrow$ PIENI Δx

EPÄTARKKUUSPERIAATE $\Delta k \Delta x \sim 1$

<u>ESIMERKKI:</u> Y.O. TULOKSEN NÄKEE GAUSSISEN JAKAUMAN TAPAUKSESSA: $A(k) = e^{-k^2/\bar{\varkappa}^2}$

OLKOON $t = 0$.

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ikx}\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\bar{\varkappa}^2} + ikx}\, dk$$

KÄYTETÄÄN: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 + bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{b^2/4a^2}$

$$\psi(x,0) = \sqrt{\pi}\, \bar{\varkappa}\, e^{-\bar{\varkappa}^2 x^2/4}$$

JAKAUMIEN LEVEYS ($1/e$ OSA):

k: $\bar{\varkappa} = \Delta k$

x: $2/\bar{\varkappa} = \Delta x$

$$\Delta k \Delta x = \bar{\varkappa} \cdot \frac{2}{\bar{\varkappa}} = 2$$

JOS OLISI KÄYTETTY $\Delta x = \langle x^2 \rangle$, $\Delta k = \langle k^2 \rangle$ KUTEN MYÖHEMMIN MÄÄR. $\Rightarrow$ $1/2$ HEISENBERG