Klassinen mekaniikka, sl 2009

Harjoitus 7, 5. & 6.11.2009
palautus 3.11.2009 kello 16 mennessä

Harjoitusistunnossa käsitellään näiden tehtävien lisäksi välikoetehtävät lyhyesti.

1. Tarkastellaan epälineaarista värähtelijää, jonka liikeyhtälö on

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0$$

Oletetaan, että ε on sen verran pieni, että nollannessa kertaluvussa termi εx^3 voidaan katsoa nollaksi. Etsi ratkaisu $x = x(t)$ ensimmäisessä kertaluvussa alkuarvoilla $x(0) = A\,,\ \dot{x}(0) = 0\,.$

Vihje: Käytä yritettä $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ ja kirjoita $\omega = \omega_0 + \varepsilon\alpha_1$.

2. van der Polin oskillaattorin liikeyhtälö voidaan antaan dimensiottomassa muodossa

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0\,.$$

Osoita, että liikeyhtälo voidaan muuntaa kahdeksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u + \epsilon x(1 - x^2/3) \\ \dot{u} &= -x\,.\end{aligned}$$

Tee sitten skaalaus $u = \epsilon U$ ja osoita, että systeemin faasikäyrän differentiaaliyhtälo (x, U)-tasossa on

$$\frac{dU}{dx} = \eta^2\,\frac{x}{\frac{1}{3}x^3 - x - U}\,,$$

missä $\eta = \epsilon^{-1}$.

3. Tarkastele edellä saadun faasikäyräyhtälön ratkaisua kun $\eta \ll 1$. Jos voidaan olettaa, että $dU/dx = \mathcal{O}(1)$ (eli dU/dx on pieni ensimmäisessä kertaluvussa), perustele miksi faasikäyrän yhtälö on likimain

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3 - x\,.$$

Piirrä lopuksi van der Polin oskillaattorin faasikäyrä $(x, \dot{x})$-tasossa.

Vihje tehtäviin 2 ja 3: van der Polin oskillaatorista löytyy paljon mielenkiintoista internetistä.