

Klassinen mekaniikka, sl 2009

Harjoitus 5, 15. & 16.10.2009
palautus 13.10.2009 kello 16 mennessä

1. Niinsanottu ahaa-elämys: Johda Lagrangen funktio ja liikeyhtälöt tapauksessa, jossa M -massainen kiila voi liukua kitkatta vaakatasossa ja kiilan kaltevilla tasolla on kitkattomasti liukuva massa m , johon vaikuttaa painovoima mg . Tämä on siis sama ongelma kuin harjoitustehtävässä 1.4, jolloin Lagrangen mekaniikkaa ei vielä oletettu perin pohjin tutuksi.
2. Tarkastellaan heiluria, joka roikkuu kiinteästä pisteestä z -akselin suuntaisessa gravitaatiokentässä, mutta on vapaa heilumaan kiinteän vartensa päässä x - ja y -suunnissa (palloheiluri). Laske varren jännitys konaisenergian ja kulmien funktiona.
3. Konstruoidaan gravitaatiopotentiaalissa toimiva vesiliukumäki sylinterikoordinaatteja (r, φ, z) käyttäen (tee piirustus rakennusfirmalle!)

$$\begin{aligned} r &= a \\ z &= h \left(1 - \frac{\varphi}{8\pi} \right), \end{aligned}$$

missä h ja a ovat vakioita ja kulma φ saa kasvaa yli 2π :n. Lähteköön mekaniikan kotilaskujen pistemäiseksi ruttaama mutta yhä m -massainen fysiikan opiskelija laskemaan mäkeä hetkellä $t = 0$ korkeudelta $z = h$. Laske Lagrangen kertoimien avulla opiskelijaan vaikuttavat sidosvoimat.

4. Rakennetaan seuraavanlainen oskillaattori. Porataan reikä suoraan maapallon läpi (ei kuitenkaan keskipisteen kautta; pienin etäisyys keskipisteeseen olkoon a). Pudotetaan reikään korrupktion syyllistynyt m -massainen mutta muuten kaikin puolin pistemäinen poliitikko. Kuinka pitkän ajan kuluttua poliitikko ponnahtaa takaisin? Vertaa tätä aikaan, joka poliitikolta kuluisi kiertää Keplerin radalla maapallon ympäri aivan pintaliittoa.