

Klassinen mekaniikka, sl 2009

Harjoitus 3, 1. & 2.10.2009
palautus 29.9.2009 kello 16 mennessä

1. Osoita, että ellipsin yhtälö

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}; \quad 0 < \epsilon < 1$$

on karteesisissa koordinaateissa muotoa

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja anna vakioiden a , b ja c lausekkeet parametrien p ja ϵ avulla.

2. ESA:n ja NASA:n yhteinen avaruusluotain Ulysses lähetettiin Maasta 6.10.1990 tutkimaan Auringon ja sen kaasukehän napaalueiden ominaisuuksia. Luotain käytti hyväkseen Jupiterin painovoimakenttää päästäkseen radalle, joka olisi lähes kohtisuorassa ekliptikaa (planeettojen ratatasoa) vastaan. Helmikuussa 1992 luotain "sirosi" Jupiterin painovoimakentässä ja joutui elliptiselle polaariradalle Auringon ympäri. Laske aluksen vauhti Jupiterin suhteen ennen sirontaa, kun aluksen perihelietäisyys sirontaa seuraavalla ellipsiradalla Auringon ympäri on 1,3 AU. Voit olettaa laskun helpottamiseksi, että radan perihelin argumentti on 0 ja inkliinaatio 90 astetta. Jupiterin etäisyys Auringosta on 5,2 AU (1 AU = $1,5 \cdot 10^{11}$ m) ja Auringon massa $2,0 \cdot 10^{30}$ kg. Voit olettaa Jupiterin painovoimakentän "koon" Jupiterin etäisyyden suhteen pieneksi. Kuva radasta osoitteessa:

<http://ulysses.jpl.nasa.gov/mission/trajectory.html>

3. Tutki, mitä tyyppiä ovat seuraavien systemien sidosehdot. Jos sidos on jossain tapauksessa holonominen, anna tilanteeseen sopivat yleistetyt koordinaatit.

- (a) Tasolla liukumatta vierivä pallo.
- (b) Tasossa liikkuvat kaksi massapistettä, joiden etäisyys on annettu ajan funktio.
- (c) Tasossa liikkuva sauva, jonka keskipisteen nopeus on kulloinkin sauvan suuntainen (tämä on itse asiassa luistin).

4. Tarkastellaan yhden euron kolikkoa, joka vierii pystyasennossa pitkin tasopintaa. Olkoon kolikon säde r ja määrätkööt kulmat θ (kolikon pinnan suunta) ja φ (kolikon vaihekulma eli "ykkösen" suunta) kolikon asennon. Olkoon (x, y) kolikon kontaktipiste tason kanssa. Johda yhtälöpari

$$\begin{aligned} \dot{x} + r\dot{\varphi} \cos \theta &= 0 \\ \dot{y} + r\dot{\varphi} \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Perustele, miksi tätä yhtälöparia ei voi integroida yksikäsitteisesti.

Tämä on eräs käytännön esimerkki ei-holonomisista sidoksista. Jos tehtävä tuntuu liian vaikealta, kannattaa mennä ehkä penkomaan kirjastoa.