

Klassinen mekaniikka, sl 2009

Harjoitus 2, 24. & 25.9.2009
palautus 22.9.2009 kello 16 mennessä

1. Keskeisvoiman alaiset liikeyhtälöt napakoordinaateissa ovat

$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= f(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0.\end{aligned}$$

Osoita, että

$$l \equiv mr^2\dot{\varphi} = \text{vakio},$$

missä l on liikemäärämomentin $\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$ itseisarvo. Johda tämän jälkeen r :n differentiaaliyhtälö Binet'n kaavana tunnettuun muotoon

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{l^2} f(r).$$

Totea, että tämä on sama kuin luennon lauseke (2.32), missä $r = 1/u$.

Johda lopuksi energiayhtälöstä lauseke

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mr^4}{l^2} \left[E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right].$$

Ottamalla tästä neliöjuuri saadaan tietenkin luentojen integraali (2.18).

2. (a) Osoita, että potentiaalin $U = -k/r$ ($k > 0$) voimakentässä liikkuva hiukkanen ei voi saavuttaa kentän keskusta ($r = 0$).
- (b) Hiukkanen liikkuu keskeispotentiaalissa ympyrärataa, joka kulkee voimakentän kautta. Osoita, että potentiaali on muotoa $U \propto r^{-4}$.
3. Massapiste liikkuu keskeispotentiaalissa

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-\alpha r},$$

missä k ja α ovat positiivisia vakioita – tämä on kvanttimekaniikassa hyvin tärkeä Yukawan potentiaali.

- (a) Määrittää liikkeen liikemäärämomentein, kun rata on R -säteinen ympyrä.
- (b) Tarkastele pieniä radiaalisia värähtelyjä ympyräradan suhteen ja määritä näiden periodit.
- (c) Milloin ympyrärata on stabiili?
4. Oletetaan, että Newtonin mekaniikka ja Keplerin lait ovat voimassa ja että planeettaliikettä ylläpitävä voima on muotoa

$$\mathbf{F} \sim \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

missä m on planeetan ja M Auringon massa. Osoita, että verrannollisuuskertoimen ei voi riippua planeetan massasta. (Vihje: Osoita, että Keplerin III lain verrannollisuuskertoimen ei riipu planeetan massasta eli perustelee, miksi luontomonisteen lauseke (2.62) ei riipu planeetan massasta vaikka siltä näyttää.)