

Palautetaan viimeistään ma 7.12. klo 12.00

1. Laske funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^{2\pi x} + 1}$$

Fourier'n sinimuunnos.

Vihje. Kehitä funktio sarjaksi eksponentin suhteen, integroi termeittäin ja sopivaa napakehitelmää sarjan summan laskemiseen.

2. Laske funktion $f(x) = \cos \frac{x^2}{2}$ Fourier-muunnos.

Vihje. Sopivaa umpinaista apukäyrää pitkin integroimalla saadaan tavallinen Gaussin integraali.

3. Yksiulotteisen lämmönjohtavuusyhtälön $\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T$ ratkaisu alkuehdolla $T(x, 0) = T_0(x)$ voidaan esittää konvoluutiona

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) T_0(y) dy,$$

missä

$$G(x - y, t) = \frac{e^{-(x-y)^2/(4\kappa t)}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}$$

on lämmönjohtavuusyhtälön Greenin funktio. Määritä $T(x, t)$ konvoluutiolauseen ja Fourier'n käänteismuunnoksen avulla, kun

$$T_0(x) = \frac{e^{-x^2/(2\sigma)}}{\sqrt{2\pi\sigma}}.$$

Tarkastele rajaa $\sigma \rightarrow 0$.

4. Laske funktion $\frac{1}{r^a}$ ($a > 0$) kolmiulotteinen Fourier'n muunnos, so.

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{r^a} \right] (\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint dx dy dz \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r^a}$$

missä $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Laske myös funktion $\frac{1}{r^a}$ kolmiulotteinen Fourier'n integraali, ts. Fourier'n käänteismuunnos. Millä parametrien a arvoilla Fourier'n muunnoksen ja käänteismuunnoksen epäoleelliset integraalit supenevat? Rajalla $a \rightarrow 1$ tästä saadaan (muodollisesti) Coulombin potentiaalin (tai Newtonin gravitaatiopotentiaalin) Fourier'n muunnos. Onko rajankäynti laillinen Fourier'n muunnoksessa tai käänteismuunnoksessa?

5. Laske funktion

$$f(t) = \sinh 2t + 3t^3 \cos t + t + 2$$

Laplacen muunnos.