Fourier'n integraalilausetta voi käyttää määrättyjen integraalien laskemiseen.

ESIM. Kolmiopulssin Fourier'n integraalista

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ixk} \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-\cos ka)}{k^2}$$

Seuraa mm.

$$\int_0^{\infty} dk \frac{(1-\cos ka)}{k^2} = \frac{\pi a}{2} \qquad (x=0).$$

Pannaan vielä $x = a$, silloin

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{iak} \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-\cos ka)}{k^2} = 0$$

Toisaalta $\int_{-\infty}^{\infty} dk \sin ak \frac{(1-\cos ka)}{k^2} = 0$

parittomuuden perusteella, niinpä

$$\int_0^{\infty} dk \frac{\cos ak\,(1-\cos ka)}{k^2} = 0$$

mikä ei muuten ole aivan ilmeistä.

Fourier'n sinimuunnos ja kosinimuunnos määritellään puoliakselilla

$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin kx \, dx ,$$

$$\tilde{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos kx \, dx .$$

ESIM. Lasketaan funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}\,x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}$$

Fourier'n sinimuunnos. Funktio on säännöllinen origossa, epäoleellisuudet kaukana.

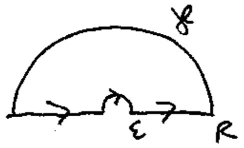
$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \sin kx \left(\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}\,x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} \right)$$

Tässä jälkimmäinen termi on tuttu

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin kx}{x} = \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\operatorname{Im} e^{ix}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} P \int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi i = \frac{\pi}{2}$$

sillä apuintegraalista



$$0 = \oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{2} 2\pi i + P\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Ensimmäisessä termissä auttaa sarja-kehitelmä:

$$\int_0^\infty dx \sin kx \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x}-1} = \int_0^\infty dx \sin kx\, e^{-\sqrt{2\pi}x}\sum_{n=0}^\infty e^{-n\sqrt{2\pi}x}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{Im}\int_0^\infty dx\, e^{ikx-(n+1)\sqrt{2\pi}x} = \sum_{n=0}^\infty \mathrm{Im}\frac{1}{(n+1)\sqrt{2\pi}-ik}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{k}{k^2+(n+1)^2 2\pi}$$

. Tämä on funktion $\coth z - \frac{1}{z}$ napakehitelmä, jolle saatiin esitys:

$$\coth z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2+n^2\pi^2}$$

Niistä nähdään, että

$$\int_0^\infty dx \sin kx \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x}-1} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{k}{\frac{k^2\pi}{2}+(n+1)^2\pi^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\coth k\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}+e^{-k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}{e^{k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}-e^{-k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}} = -\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{\sqrt{2\pi}k}+1}{e^{\sqrt{2\pi}k}-1}$$

$$= -\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}k}-1}.$$

Niinpä

$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx \sin kx\left(\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}k}+\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}k}-1}-\frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}k}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}k}.$$

ESIM. $$I_1 = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = o(1) \quad , \lambda \to +\infty ,$$

kun $f \in C[a,b]$.

Apuintegraali: $$I_2 = \int_a^{b-\pi/\lambda} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx =$$

$$\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^{b} f(x) e^{i\lambda x} e^{-i\pi} dx = -\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^{b} f(x) e^{i\lambda x} dx .$$

Niinpä $$I_1 + I_2 = \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

esim. väliarvolauseeseen perustuvan arvion nojalla:

$$\left| \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \le \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| dx = \underset{a \le \xi \le a+\frac{\pi}{\lambda}}{|f(\xi)|} \frac{\pi}{\lambda} .$$

$$I_1 - I_2 = \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right] e^{i\lambda x} dx + \underbrace{\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} f(x) e^{i\lambda x} dx}_{\downarrow \atop 0}$$

kuten edellä.

Taas arvioidaan

$$\left| \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right] e^{i\lambda x} dx \right| \le \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left| f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx$$

$$= \left| f(\xi) - f\left(\xi+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| (b-a) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

funktion f jatkuvuuden perusteella.

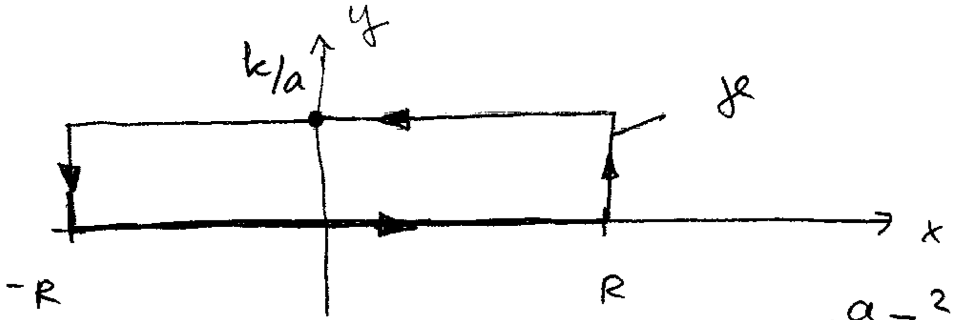
ESIM. $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, $a > 0$.

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2} - ikx} dx,$$ olkoon $k > 0$.

Ensin eksponentin argumentti täydennetään neliöksi:

$$-\frac{ax^2}{2} - ikx = -\frac{a}{2}\left(x + \frac{ik}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{2a},$$ minkä jälkeen

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{k^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x + \frac{ik}{a}\right)^2} dx$$



Tässä apuintegraali $\int_\gamma e^{-\frac{a}{2}z^2} dz = 0$. Pystysuorilla osuuksilla integrandille voidaan kirjoittaa

$$e^{-\frac{a}{2}(R \pm iy)^2} \to 0,$$ kun $R \to \infty$. Integrointiväli on äärellinen, niinpä rajalla $R \to \infty$ nämä integraalit häviävät ja saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{a}{2}x^2} + \int_{\infty + \frac{ik}{a}}^{-\infty + \frac{ik}{a}} d\xi\, e^{-\frac{a}{2}\xi^2} = 0$$

Näin saadaan tärkeä tulos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x + i\frac{k}{a}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \quad , \quad a>0.$$

Tässä taas

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{\sqrt{a}\, t^{-1/2}}{a\sqrt{2}} dt$$

$$\left[\frac{ax^2}{2} = t \rightarrow axdx = dt \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}}\, \Gamma(1/2) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$ Loppujen lopuksi siis

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2} - ikx} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{k^2}{2a}}.$$

ESIM. Vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälö:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad \text{alkuehdolla } \psi(0,x) = \phi(x).$$

Tässä voidaan käyttää F-muunnosta. F-muunnos koordinaatin suhteen yhtälöstä puolittain antaa

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{\psi}(t,k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\tilde{\psi}(t,k), \quad \text{missä } \tilde{\psi}(t,k) = \int dx\, \psi(t,x) e^{-ikx}.$$

Tämän yhtälön ratkaisu on

$$\tilde{\psi}(t,k) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t}\tilde{\phi}(k), \quad \text{missä } \tilde{\phi}(k) = \int dx\, \phi(x) e^{-ikx}.$$

Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisu

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t}\tilde{\phi}(k) =$$

$$= \int dy\, G(t,x-y)\,\phi(y), \quad \text{missä } G \text{ on Greenin funktio}$$

$$G(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t}.$$

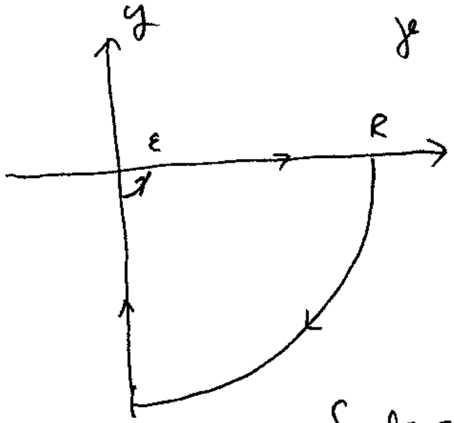
Tässä Gaussin integraali eroaa hieman jo lasketusta. Ensin leerätään neliö ja siirretään integroimismuuttujaa:

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-i\frac{a}{2}k^2 + ibk} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-i\frac{a}{2}\left(k-\frac{b}{a}\right)^2 + i\frac{b^2}{2a}}$$

$$= e^{i\frac{b^2}{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-i\frac{a}{2}k^2} = 2e^{i\frac{b^2}{2a}}\int_0^{\infty} dk\, e^{-i\frac{a}{2}k^2} = e^{i\frac{b^2}{2a}}\int_0^{\infty} du\, u^{-1/2} e^{-\frac{ia}{2}u}.$$

Tähän on nyt saatu integraali, joka muistuttaa Γ-funktion integraaliesitystä. Muokataan vähän.

Apuintegraali $\oint_\gamma dz\, z^{\alpha-1} e^{-iaz} = 0, \quad a > 0.$



Toisaalta tämä on

$$0 = \int_\varepsilon^R dx\, x^{\alpha-1} e^{-iax} - \int_{-R}^{-\varepsilon} dy\, |y|^{\alpha-1} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha + ay}$$

$$+ \int_{\swarrow \varepsilon} dz\, z^{\alpha-1} e^{-iaz} + \int_{R \swarrow} dz\, z^{\alpha-1} e^{-iaz}.$$

Suurella kaarella integraali menee nollaan rajalla $R \to \infty$ Jordanin lemman perusteella, kun $\alpha < 1$. Pienellä kaarella taas integraali häviää kaaren lyhenemisen nojalla rajalla $\varepsilon \to 0$, kun $\alpha > 0$. Jää

$$\int_0^\infty dx\, x^{\alpha-1} e^{-iax} = \int_{-\infty}^0 dy\, |y|^{\alpha-1} e^{ay + (-i\frac{\pi\alpha}{2})}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1} e^{-ay} = a^{-\alpha} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \Gamma(\alpha).$$

Aputulos on siis

$$\int_0^\infty dx\, x^{\alpha-1} e^{-iax} = \frac{\Gamma(\alpha)}{a^\alpha} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Tällä perusteella

$$\int_{-\infty}^\infty dk\, e^{-i\frac{a}{2}k^2 + ibk} = e^{i\frac{b^2}{2a}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}} = e^{i\frac{b^2}{2a} - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Näin ollen Schrödingerin yhtälön Greenin funktio on

$$G(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 k^2}{2m} t} = \sqrt{\frac{2\pi m}{\hbar t}}\, e^{i\frac{x^2 m}{2\hbar t} - i\frac{\pi}{4}}.$$

Usean muuttujan funktion F-integraali.

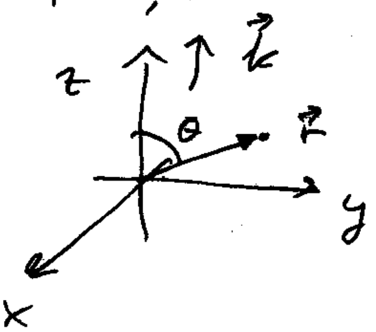
Tärkeimmät tapaukset

$$f(\vec r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec k \int d\vec y \; e^{i\vec k(\vec r-\vec y)} f(\vec y),$$

$$f(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\omega \int dk \int dt' \int dy \; e^{-i\omega(t-t')+ik(x-y)} f(t',y)$$

merkkisopimus vastaa pos. x-akselin suuntaan etenevää tasoaaltoa.

Usein kiertosymmetria $f(\vec r) = f(r)$, jolloin kulmaintegraalit voi laskea:



$$\mathcal{F}[f(r)](\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dr\, r^2 \; e^{-i\vec k\vec r} f(r) \quad , \quad \vec k\cdot\vec r = kr\cos\theta$$

Standardi muuttujan vaihto. $\cos\theta = t$ antaa

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\infty} dr\, r^2 f(r) \Big/_{-1}^{1} \frac{e^{-ikrt}}{-ikr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^{\infty} dr\, r^2 f(r)\cdot\frac{2\sin kr}{kr}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k}\int_0^{\infty} dr\, r\, f(r)\sin kr.$$

Tärkeä tapaus $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$:

- Yukawan potentiaali ydinfysiikassa
- varjostetun sähköstaattisen potentiaali.

Sirontateoriassa osoitetaan, että vuorovaikutuspotentiaalin tai korrelaatiofunktion Fourier'n muunnos on suoraan mitattava suure.

$$\int_0^\infty dr\, r\, \frac{e^{-ar}}{r} \sin kr = \mathrm{Im} \int_0^\infty dr\, e^{ikr-ar}$$

$$= \mathrm{Im} \left. \frac{e^{ikr-ar}}{ik-a} \right|_0^\infty = \mathrm{Im} \frac{1}{a-ik} = \frac{k}{a^2+k^2}.$$

Niinpä

$$F\left[\frac{e^{-ar}}{r}\right](\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2+k^2} \xrightarrow[a\to 0]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2}.$$

Coulombin potentiaalin F-muunnos ei suppene, mutta

$$\int d\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{k^2} \propto \frac{1}{r} \quad !$$