

Fourier'in integraalilausesta voi käyttää määrättyjen integraalien laskemiseen.

ESIM. Kolmiöpulssin Fourier'in integraalista

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ixk} \frac{1}{a^2 \sqrt{\pi}} \frac{(1 - \cos ka)}{k^2}$$

Seuraa mm.

$$\int_0^{\infty} dk \frac{(1 - \cos ka)}{k^2} = \frac{\pi a}{2} \quad (x=0).$$

Pannaan vielä $x=a$, silloin

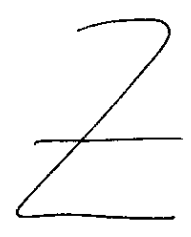
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iak} \frac{1}{a^2 \sqrt{\pi}} \frac{(1 - \cos ka)}{k^2} = 0$$

Toisaalta $\int_{-\infty}^{\infty} dk \sin iak \frac{(1 - \cos ka)}{k^2} = 0$

parittomuden perusteella, niinpä

$$\int_0^{\infty} dk \frac{\cos ak (1 - \cos ka)}{k^2} = 0$$

mikä ei muuten ole oivan ilmeistä.



Fourier'n sinimuunnos ja kosinimuunnos
määritellään puoliosilla

(42)

$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx,$$

$$\tilde{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx.$$

ESIM. Lasketaan funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$$

Fourier'n sinimuunnos. Funktio on säännöllinen
origossa, epäoleellisuudet kaukana.

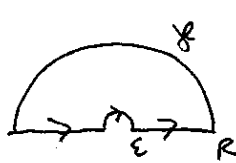
$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx \sin kx \left(\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \right)$$

Tämä jälkimmäinen termi on tuttu

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin kx}{x} = \int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\text{Im} e^{ix}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Im} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{2} \text{Im} \pi i = \frac{\pi}{2}$$

Sillä apuintegraalista



$$0 = \oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow[\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} 2\pi i + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Ehdotuksellisesti termienä ainoa järkevä -

(43)

laskelma:

$$\int_0^{\infty} dx \sin kx \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} = \int_0^{\infty} dx \sin kx e^{-\sqrt{2\pi}x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sqrt{2\pi}x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx e^{ikx - (n+1)\sqrt{2\pi}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Im} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2\pi} - ik}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{k^2 + (n+1)^2 2\pi} \quad \text{Tämä on funktion } \coth z - \frac{1}{z}$$

kehittäminen, jolle saatiin esitys:

$$\coth z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2 \pi^2}$$

nistä nähdään, että

$$\int_0^{\infty} dx \sin kx \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{\frac{k^2 \pi}{2} + (n+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\coth k \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{k \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{k\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + e^{-k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}{e^{k\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - e^{-k\sqrt{\frac{\pi}{2}}}} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sqrt{2\pi}k} + 1}{e^{\sqrt{2\pi}k} - 1}$$

$$= -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}k} - 1} \quad \text{Näinpä}$$

$$\tilde{f}_S(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx \sin kx \left(\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}k} + \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}k} - 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}k} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}k}$$

ESIM. $I_1 = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = o(1) \quad , \lambda \rightarrow +\infty ,$

kun $f \in C[a, b]$.

Apuintegrali: $I_2 = \int_a^{b-\pi/\lambda} f(x + \frac{\pi}{\lambda}) e^{i\lambda x} dx =$
 $\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x) e^{i\lambda x} e^{-i\pi} dx = - \int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x) e^{i\lambda x} dx .$

Näinpä $I_1 + I_2 = \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0$
 $\lambda \rightarrow \infty$

esim. väliarvolauseen perustuvan arvon nojalla:

$$\left| \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| dx = |f(\xi)| \frac{\pi}{\lambda}$$

$a \leq \xi \leq a + \frac{\pi}{\lambda}$

$$I_1 - I_2 = \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})] e^{i\lambda x} dx + \underbrace{\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x) e^{i\lambda x} dx}_0$$

↓
0
kuten edellä.

Täas arvioidaan

$$\left| \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})] e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})| dx$$

$$= |f(\xi) - f(\xi + \frac{\pi}{\lambda})| (b-a) \rightarrow 0$$

$\lambda \rightarrow \infty$

funktion f jatkuvuuden perusteella.

ESIM.

$$f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}, \quad a > 0.$$

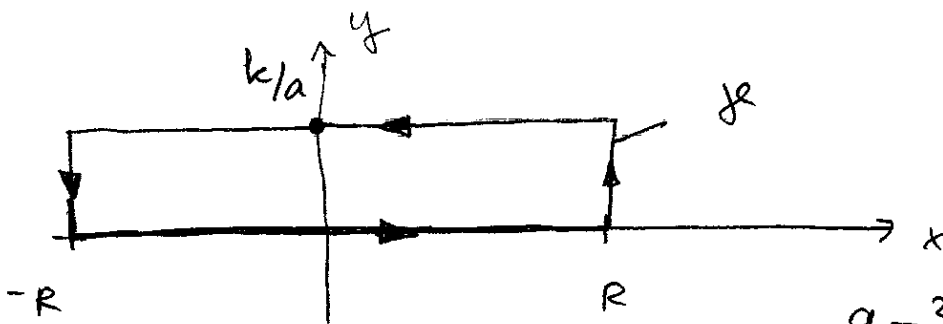
(45)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2} - ikx} dx, \quad \text{olleoon } k > 0.$$

Ensin eksponentin argumentti täydennetään neliöksi:

$$-\frac{ax^2}{2} - ikx = -\frac{a}{2} \left(x + \frac{ik}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{2a}, \quad \text{minkä jälkeen}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{k^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} \left(x + \frac{ik}{a}\right)^2} dx$$



Tässä apuintegraali $\int e^{-\frac{a}{2} z^2} dz = 0$. Pystysuorilla osuuksilla integrandille voidaan kirjoittaa

$e^{-\frac{a}{2}(R \pm iy)^2} \rightarrow 0$, kun $R \rightarrow \infty$. Integrointi on äärellinen, minkä rajoilla $R \rightarrow \infty$ nämä integraalit häviävät ja saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2} x^2} + \int_{\infty + \frac{ik}{a}}^{-\infty + \frac{ik}{a}} d\xi e^{-\frac{a}{2} \xi^2} = 0$$

Näin saadaan tärkeä tulos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}(x + i\frac{k}{a})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx, \quad a > 0.$$

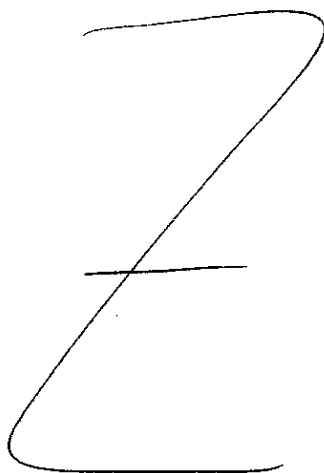
Täisi taas

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\frac{\sqrt{a}t}{a\sqrt{2}}}} dt$$

$$\left[\frac{ax^2}{2} = t \rightarrow ax dx = dt \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \quad \text{Loppujen lopuksi siis}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2} - ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{k^2}{2a}}.$$



ESIM. Vapaan hiukkeen Schrödingerin yhtälö: (47)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{allenehdolla } \Psi(0, x) = \phi(x).$$

Tässä voidaan käyttää F-muunnosta. F-muunnos koordinaattien suhteen yhtälöstä muodollisesti antaa

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}(t, k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{\Psi}(t, k), \quad \text{missä } \tilde{\Psi}(t, k) = \int dx \Psi(t, x) e^{-ikx}$$

Tämän yhtälön ratkaisu on

$$\tilde{\Psi}(t, k) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} t} \tilde{\phi}(k), \quad \text{missä } \tilde{\phi}(k) = \int dx \phi(x) e^{-ikx}$$

Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisun

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx - \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} t} \tilde{\phi}(k) =$$

$$= \int dy G(t, x-y) \phi(y), \quad \text{missä } G \text{ on Greenin funktio}$$

$$G(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} t}$$

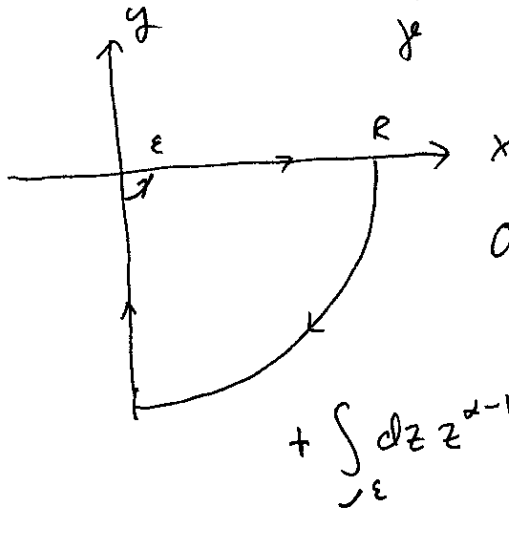
Tässä Gaussin integraali eroaa hieman jo lasketusta.

Ensin kerätään neliö ja siirretään integraalimuuttujaa:

$$\begin{aligned} I(a, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{ia}{2}k^2 + i\beta k} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{ia}{2}\left(k - \frac{\beta}{a}\right)^2 + i\frac{\beta^2}{2a}} \\ &= e^{i\frac{\beta^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{ia}{2}k^2} = 2e^{i\frac{\beta^2}{2a}} \int_0^{\infty} dk e^{-\frac{ia}{2}k^2} = e^{i\frac{\beta^2}{2a}} \int_0^{\infty} du u^{-1/2} e^{-\frac{ia}{2}u} \end{aligned}$$

Tähän on nyt saatu integraali, joka muistuttaa Γ -funktion integraalieritystä. Muokataan vähän.

Apuintegraali $\int_{\gamma} dz z^{\alpha-1} e^{-iaz} = 0, \quad a > 0.$



Tottaalta tämä on

$$0 = \int_{\epsilon}^R dx x^{\alpha-1} e^{-iax} - \int_{\epsilon}^R dy |y|^{\alpha-1} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha + ay} + \int_{-R}^{-\epsilon} dz z^{\alpha-1} e^{-iaz} + \int_{R}^{\epsilon} dz z^{\alpha-1} e^{-iaz}$$

Suurella kaarella integraali menee nolleen rajalle $R \rightarrow \infty$ Jordanin lemmän perusteella, kun $\alpha < 1$.
 Pienellä kaarella taas integraali korvaa kaaren lyhyemmän rajalla, rajalla $\epsilon \rightarrow 0$, kun $\alpha > 0$. Jää

$$\int_0^{\infty} dx x^{\alpha-1} e^{-iax} = \int_{-\infty}^0 dy |y|^{\alpha-1} e^{ay + (-i\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \int_0^{\infty} dy y^{\alpha-1} e^{-ay} = a^{-\alpha} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \Gamma(\alpha).$$

Aputulos on siis

$$\int_0^{\infty} dx x^{\alpha-1} e^{-iax} = \frac{\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha}} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

Tällä perusteella

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i\frac{a}{2}k^2 + ibk} = e^{\frac{i\beta^2}{2a}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-i\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{i\beta^2}{2a} - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Näin ollen Schrödingerin yhtiön Greenin funktio on

$$G(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} t} = \sqrt{\frac{2\pi m}{\hbar t}} e^{i \frac{x^2 m}{2\hbar t} - i\frac{\pi}{4}}$$

Usein muuttujan funktion F-integraali.

Tärkeimmät tapaukset

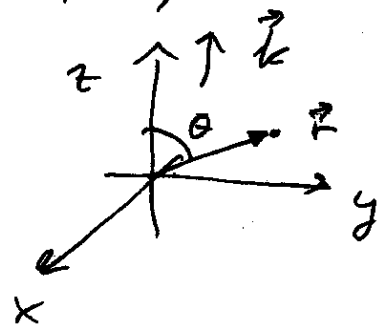
$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \int d\vec{y} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{y})} f(\vec{y})$$

$$f(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int dk \int dt' \int dy e^{-i\omega(t-t') + ik(x-y)} f(t', y)$$

merkki sopimus vastaa pos. x-akselin suuntaan etenevä jarruaalto.

Usein kierto symmetria $f(\vec{r}) = f(r)$, tällöin

kulmaintegraalit voi laskea:



$$F[f(r)](k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-i\vec{k}\vec{r}} f(r), \quad \vec{k}\cdot\vec{r} = kr \cos\theta$$

Standardi muuttujan vaihto.

$$\cos\theta = t \text{ antaa}$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} dr r^2 f(r) \int_{-1}^1 \frac{e^{-ikrt}}{-ikr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dr r^2 f(r) \cdot \frac{2\sin kr}{kr}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^{\infty} dr r f(r) \sin kr$$

Tärkeä tapaus $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$:

(50)

- Yukawain potentiaali ydinfyysikassa
- varjostetun sähköstaattisen potentiaali.

Sironateoriassa osoitetaan, että vuorovaikutus-
potentiaalini tai korrelaatiofunktion Fourier'n
muunnos on suoraan mitattava suure.

$$\int_0^{\infty} dr r \frac{e^{-ar}}{r} \sin kr = \text{Im} \int_0^{\infty} dr e^{ikr-ar}$$
$$= \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr-ar}}{ik-a} = \text{Im} \frac{1}{a-ik} = \frac{k}{a^2+k^2}$$

Näinpi

$$F\left[\frac{e^{-ar}}{r}\right](\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2+k^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2}$$

Coulombin potentiaalini F-muunnos ei
suppene, mutta

$$\int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{k^2} \propto \frac{1}{r} !$$