F-sarja kompleksilukumuodossa välillä $[-L, L]$:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \qquad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{\overset{!!}{-}\frac{in\pi x}{L}}\,dx .$$

$\left\{e^{\frac{i\pi n x}{L}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ on ortogonaalinen funktiojoukko,

so.
$$\int_{-L}^{L}\left(e^{\frac{im\pi x}{L}}\right)^{*} e^{\frac{in\pi x}{L}}\,dx = 2L\delta_{nm}.$$

Tällainen F-sarja voidaan ymmärtää myös analyyttisen funktion L-sarjaksi tai T-sarjaksi, kun

$$e^{\frac{in\pi x}{L}} = \left(e^{\frac{i\pi x}{L}}\right)^{n} = z^{n}$$

missä
$$z=e^{i\varphi}, \qquad |\varphi|=\left|\frac{\pi x}{L}\right| \le \pi .$$

Silloin tunnettujen funktioiden T-sarjojen avulla saadaan F-sarjojen summia.

<u>ESIM.</u> $$F(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{i\varphi n}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$
$z=qe^{i\varphi}$

Vasemmalla
$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1-q\cos\varphi+i\sin\varphi}{1-2q\cos\varphi+q^2}.$$

Merkitään reaali- ja imaginaariosat yhtä suuriksi:

$$\frac{1-q\cos\varphi}{1-2q\cos\varphi+q^2}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n\cos n\varphi,$$

$$\frac{\sin\varphi}{1-2q\cos\varphi+q^2}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n\sin n\varphi .$$

Rajalla $q \to 1$ sarjat hajaantuvat. Integroinnin jälkeen saadaan sarjoja, joissa rajankäynti $q \to 1$ on mahdollinen:

$$\int_0^x \frac{1 - q\cos\frac{\pi\xi}{L}}{1 - 2q\cos\frac{\pi\xi}{L} + q^2}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_0^x \cos\frac{n\pi\xi}{L}\, d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Big/_0^x \frac{L\sin\frac{n\pi\xi}{L}}{n\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{L}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Tässä vasemman puolen integrointi näyttää ikävältä. Samaan tulokseen päästään $\frac{1}{1-z}$:n integraalifunktion sarjan avulla:

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\left(\cos\frac{n\pi x}{L} + i\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Tässä $\left(\varphi = \frac{\pi x}{L}\right)$

$$\ln(1-z) = \ln(1 - q\cos\varphi - iq\sin\varphi) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + q^2 - 2q\cos\varphi\right)$$

$$- i\arctan\left(\frac{q\sin\varphi}{1 - q\cos\varphi}\right)$$

Niinpä

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + q^2 - 2q\cos\frac{\pi x}{L}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

mistä rajalla $q \to 1$ tulee

$$\ln 2\left|\sin\frac{\pi x}{L}\right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Sarja suppenee tasaisesti väleillä $[-L,-\delta]$, $[\delta, L]$, $\delta > 0$ ja on näin ollen sellaisen funktion F-sarja, joka ei ole paloittain sileä (vaan origossa jopa rajoittamalta ~~kä~~ kasvava).

Imaginaariosista saadaan

$$\arctan\left(\frac{q\sin\frac{\pi x}{L}}{1-q\cos\frac{\pi x}{L}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

mistä rajalla $q \to 1$ seuraa

$$\arctan\frac{\sin\frac{\pi x}{L}}{1-\cos\frac{\pi x}{L}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L},$$ missä

$$\arctan\frac{\sin\frac{\pi x}{L}}{1-\cos\frac{\pi x}{L}} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1-\cos\frac{\pi x}{L}}{\sin\frac{\pi x}{L}} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{L}, \quad |x|\leq L.$$

Fourier-sarjoja voidaan vapaasti integroida, derivoinnin laillisuus on erikseen tarkasteltava esim. differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa.

<u>ESIM.</u> $y'' + \omega^2 y = f(x)$,

missä $f(x) = f(x+2\pi)$ ja $f(x) = |x|$, kun $|x|\leq\pi$.
Silloin $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. Yrite:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$y''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$ Sijoitetaan

$$y''+\omega^2 y = \omega^2\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\omega^2-n^2)\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right].$$

Kertoimet yhtäsuuriksi; nähdään, että

$$a_0 = \frac{\pi}{\omega^2}\ , \quad b_n = 0\ , \quad a_{2m} = 0$$

ja

$$a_{2m+1} = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2m+1)^2\left[(2m+1)^2-\omega^2\right]}\,.$$

Niinpä ratkaisun Fourier-sarja on

$$y(x) = \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2\left[(2n+1)^2-\omega^2\right]}$$

joka kestää hyvin derivoinnin kahteenkin kertaan (tuloksena saatava sarja suppenee tasaisesti)

Tässä po. $\omega \neq 2n+1$, mikä fysikaalisesti vastaa sitä, että pakkovoiman taajuuden läheisyydessä harmonisen värähtelijän ominaistaajuutta on joko vaimennus tai anharmonisuus tai molemmat otettava huomioon. (Jokin kerroin kasvaa rajatta, kun $\omega \to 2n+1$ eli resonanssissa).

ORTONORMITETUT FUNKTIOJOUKOT

Täydellinen funktioavaruus A: $\{f_n\} \in A$
$f_n \underset{n\to\infty}{\to} f \in A$. Riippuu siitä, miten $\to$ ymmärretään (määritysjoukon joka pisteessä, tasaisesti – nämä on mainittu).

Täydellinen funktiojoukko (kanta) $\{e_n\}$:

$$\forall f \in A: \quad f = \sum a_n e_n$$

mielivaltaisella tarkkuudella (tämänkin voidaan ymmärtää eri tavoin).

Rajankäynnin tarkasteluun tarvitaan "etäisyys".
Usein normin avulla:

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\|f\| \geq 0 \;; \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad (\text{"melkein kaikkialla"})$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

jolloin "etäisyys" $d(f,g) = \|f-g\|$

ja $f_n \to g \Leftrightarrow \|f_n - g\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Funktioiden approksimoimiseen käytetään usein ortonormiteltuja funktiojoukkoja, jolloin normi rakennetaan skalaaritulon avulla.

Skalaaritulo funktioavaruudessa:

$$f \cdot g = \int_a^b f^* g \, dx$$

Normi tästä

$$\|f\| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx}$$

~~Mo~~dollinen Fourier'n sarja:

$$f = \sum_k c_k e_k \qquad c_k = e_k \cdot f = \int_a^b e_k^* f \, dx$$

kun $\{e_k\}$ on ortonormitettu funktiojoukko,

so.

$$e_k \cdot e_l = \delta_{kl} .$$

Kun ortonormitettu joukko $\{e_k\}$ on annettu, paras approksimaatio F-sarjalla, sillä silloin neliöllinen keskipoikkeama

$$\|f - \sum_{k=1}^n b_k e_k\|^2 = \Delta_n^2 \qquad \text{on pienin}$$

ts. $\|f - \sum_{k=1}^n b_k e_k\|^2 \geqslant \|f - \sum_{k=1}^n c_k e_k\|^2 .$

F-sarjan neliöllinen keskipoikkeama

$$\|\Delta_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \geqslant 0 .$$

Seuraa <u>Besselin epäyhtälö</u>

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 .$$

<u>Suljettu</u> funktiojoukko toteuttaa <u>Parsevalin kaavan</u>

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \qquad \forall f .$$

"pituus säilyy"

<u>Täydellinen</u> funktiojoukko:

$$(f \cdot e_k) = 0 \quad \forall e_k \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \text{m.k.}$$

Hilbertin avaruudessa täydellinen joukko on suljettu ja päinvastoin.

<u>Hilbert:</u>
- lineaarinen
- $\exists$ skalaaritulo
- täydellinen normin $\|f\|^2 = f \cdot f$ suhteen

<u>Ljapunov:</u> $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ suljettu välillä $[-\pi, \pi]$.

<u>Plancherelin kaava</u>

$$\int_a^b f^* g \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* d_n$$

"skalaaritulo säilyy".

Besselin epäyhtälöstä seuraa <u>neliöllisesti integroituvalle</u> funktiolle (s.o. $\int_a^b |f|^2 dx < +\infty$) myös ominaisuus

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi x}{L}} f(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Vähän yleisemmässä muodossa tämä tunnetaan <u>Riemannin-Lebesguen lemmana</u>

$$\int_a^b e^{i\lambda x} f(x)\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Jos funktio f on sileä, arviota voidaan esittää integroimalla täsmentää, kuten jäljempänä nähdään.

Parsevalin kaavaa voi myös käyttää lukujonojen summaamiseen.

<u>ESIM.</u> Funktiolle $f(x+2\pi) = f(x)$, $f(x) = x$, $|x| < \pi$ saatiin aikaisemmin Fourier'n sarja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx , \qquad |x| < \pi .$$

Tämä on laskettu normittamattomassa ortogonaalisessa joukossa. Normitetaan:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi \quad \Rightarrow \quad e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx.$$

Silloin Parsevalin kaava antaa

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\sqrt{\pi}\right)^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

FOURIER'N INTEGRAALI

"Hand-waving"

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-\frac{in\pi y}{L}} dy \cdot e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

Integraalisumma: $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $\Delta k = \frac{n+1}{L}\pi - \frac{n}{L}\pi = \frac{\pi}{L}$

$$= \sum_{k_n} \frac{\Delta k}{2\pi} e^{ixk_n} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-iyk_n} \xrightarrow[L\to\infty]{} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) e^{ik(x-y)}$$

<u>Fourier'n integraali</u> (f paloittain sileä ja $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty$)

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) e^{ik(x-y)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) e^{ik(x-y)}$$

Ulompi integraali on siis <u>pääarvo</u>integraali.
Sisempi integraali on <u>Fourier'n muunnos</u>

$$F(k) = \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx}.$$

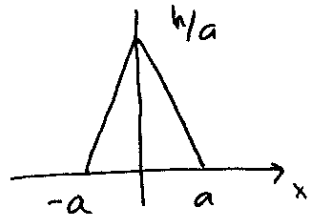
Kosinimuunnos ja sinimuunnos:

$$\tilde{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx\, dx.$$

ESIM. Kolmiopulssin Fourier-muunnos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$



$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixk} \frac{h}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-ixk} \frac{h}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{0} e^{-ixk} \frac{h}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right) dx = \frac{h/a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} \left[e^{-ixk}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + e^{ixk}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] dx$$

$$= \frac{h}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos kx \, dx = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\Big/_0^a \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial k} \int_0^a \sin kx \, dx \right]$$

$$= \frac{h}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ka}{k} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial k} \Big/_0^a \frac{\cos kx}{k} \right] = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ka}{k} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial k} \frac{\cos ka - 1}{k} \right]$$

$$= \frac{h}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ka}{k} - \frac{\cancel{a}\sin ka}{\cancel{a}k} + \frac{1 - \cos ka}{ak^2} \right] = \frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos ka)}{k^2}.$$

Tässä $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = h$; rajalla $a \to 0$ korkea ja kapea piikki, jolle $\tilde{f}(k) \xrightarrow[a \to 0]{} \frac{h}{\sqrt{2\pi}}$.

Jos $g(x)$ on jatkuva funktio, niin

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\,dx = \lim_{a \to 0} g(\xi) \int_{-a}^{a} f(x) = h \lim_{a \to 0} g(\xi) = hg(0)$$

$$|\xi| \le a$$

Niinpä funktiot
$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

muodostavat δ-jonon, kun $a \to 0$. Tällä jonolla ei ole raja-arvoa, mutta integraaleissa rajalle voidaan mennä.