

F-sarja kompleksilukumuodossa välillä  $[-L, L]$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi x}{L}}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{L}} dx$$

$\left\{ e^{\frac{i n \pi x}{L}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  on ortogonaalinen funktiojoukko,

$$\text{so. } \int_{-L}^L \left( e^{\frac{i m \pi x}{L}} \right)^* e^{\frac{i n \pi x}{L}} dx = 2L \delta_{nm}.$$

Tällainen F-sarja voidaan ymmärtää myös analyyttisen funktion L-sarjaksi tai T-sarjaksi,

$$\text{kun } e^{\frac{i n \pi x}{L}} = \left( e^{\frac{i \pi x}{L}} \right)^n = z^n$$

$$\text{missä } z = e^{i\varphi}, \quad |\varphi| = \left| \frac{\pi x}{L} \right| \leq \pi.$$

Silloin funktioiden T-sarjojen avulla saadaan F-sarjojen summia.

ESIM.  $F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{i\varphi n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$   
 $z = q e^{i\varphi}$

$$\text{Vasemmalla } \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-q(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \frac{1-q\cos\varphi + i \sin\varphi}{1-2q\cos\varphi + q^2}.$$

Merkitään reaal- ja imaginaariosat yhtä tekemällä:

$$\frac{1-q\cos\varphi}{1-2q\cos\varphi + q^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\varphi,$$

$$\frac{\sin\varphi}{1-2q\cos\varphi + q^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin n\varphi.$$

(32)

Rajalla  $q \rightarrow 1$  sarjat hajaantuvat. Integroinnin jälkeen saadaan sarjoja, joissa rajankäynti  $q \rightarrow 1$  on mahdollinen:

$$\int_0^x \frac{1 - q \cos \frac{\pi \xi}{L}}{1 - 2q \cos \frac{\pi \xi}{L} + q^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_0^x \cos \frac{n\pi \xi}{L} d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{L \sin \frac{n\pi \xi}{L}}{n\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Tässä vasemman puolen integrointi näyttää ikäväältä. Samaa tulokseen päristään  $\frac{1}{1-z}$ :n integraalifunktion sarjan avulla:

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \left( \cos \frac{n\pi x}{L} + i \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Tässä ( $\varphi = \frac{\pi x}{L}$ )

$$\ln(1-z) = \ln(1 - q \cos \varphi - i q \sin \varphi) = \frac{1}{2} \ln(1 + q^2 - 2q \cos \varphi)$$

$$- i \arctan \left( \frac{q \sin \varphi}{1 - q \cos \varphi} \right)$$

Niinpä

$$\frac{1}{2} \ln(1 + q^2 - 2q \cos \frac{\pi x}{L}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

mistä rajalla  $q \rightarrow 1$  tulee

$$\ln 2 |\sin \frac{\pi x}{L}| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Sarja suppenee tasaisesti väleillä  $[-L, -\delta]$ ,  $[\delta, L]$ ,  $\delta > 0$  ja on näin ollen sellaisten funktion  $F$ -sarja, joka ei ole paloittain sileä (vaan origossa jopa rajoittamatta kätevä).

Imaginaariosista jaetaan

$$\arctan\left(\frac{q \sin \frac{\pi x}{L}}{1 - q \cos \frac{\pi x}{L}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

missä rajoilla  $q \rightarrow 1$  seuraava

$$\arctan \frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{1 - \cos \frac{\pi x}{L}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{missä}$$

$$\arctan \frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{1 - \cos \frac{\pi x}{L}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1 - \cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{L}, \quad |x| \leq L.$$

Fourier-sarjoja voidaan hakea integraaleista,
denvoimien laillisuus on aritmetiikka tarkasteltava
esim. differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa.

ESIM.  $y'' + \omega^2 y = f(x),$

missä  $f(x) = f(x+2\pi)$  ja  $f(x) = |x|$ , kun  $|x| \leq \pi$ .

Silloin  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$  yrite:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$y''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad \text{Sijoitetaan}$$

$$y'' + \omega^2 y = \omega^2 \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega^2 - n^2) [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Kertoimet yhtäsuuret; nähdään, että

$$a_0 = \frac{\pi}{\omega^2}, \quad b_n = 0, \quad a_{2m} = 0$$

ja 
$$a_{2m+1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2m+1)^2 [(2m+1)^2 - \omega^2]}$$

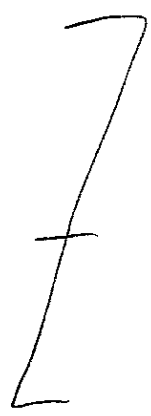
Niinpä ratkaisuun Fourier sarja on

$$y(x) = \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2 [(2n+1)^2 - \omega^2]}$$

joka kestää hyvin derivoimien kahteenkin kertaan (tuloksena saatava sarja suppenee tasaisesti)

Tässä pö.  $\omega \neq 2n+1$ , mikä fyysikaalisesti vastaa sitä, että pakkovoiman taajuuksien lähestyessä harmonisen värähtelijän ominaistaajuuksia on joko vaimennus tai ankara-  
mitus tai molemmat otettava huomioon.

(Joten kerron kasvavasta rajasta, kun  $\omega \rightarrow 2n+1$  eli resonanssista).



ORTONORMITETUT FUNKTIOJOUKOT

Täydellinen funktioavaruus  $A: \{f_n\} \in A$

$f_n \rightarrow f \in A$ . Riippuu siitä, miten  $\rightarrow$  ymmär-

tetaan (määrittelyjoukon jolla pisteesti, tasaisesti - nämä on mainittu).

Täydellinen funktiojoukko (kanta)  $\{e_n\}$ :

$\forall f \in A: f = \sum a_n e_n$

mikä tahansa tarkkunnella (tämäkin voidaan ymmärtää eri tavoin).

Rajanläynnin tarkasteluun tarvitaan "etäisyys".

Usein normin avulla:

$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$\|f\| \geq 0$ ;  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$  ("millein kaikinalla")

$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

jolloin "etäisyys"  $d(f, g) = \|f - g\|$

ja  $f_n \rightarrow g \Leftrightarrow \|f_n - g\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Funktioiden approksimoimiseen käytetään usein ortonormitettuja funktiojoukkoja, jolloin normi rakennetaan skalaarituloilla avulla.

Skalaaritulo funktioavaruudessa:

$$f \cdot g = \int_a^b f^* g \, dx$$

Normi tästä

$$\|f\| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx}$$

~~Mat~~ Mallinen Fourier'n sarja:

$$f = \sum_k c_k e_k \quad c_k = e_k \cdot f = \int_a^b e_k^* f \, dx$$

kun  $\{e_k\}$  on ortonormitetty funktiojoukko,

so.

$$e_k \cdot e_l = \delta_{kl}$$

Kun ortonormitetty joukko  $\{e_k\}$  on annettu, paras approksimaatio  $F$ -sarjalla, tällä tällä neliöllinen keskipötköama

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n b_k e_k \right\|^2 = \Delta_n^2 \quad \text{on pienin}$$

$$\text{ts. } \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k e_k \right\|^2 \geq \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2$$

$F$ -sarjan neliöllinen keskipötköama

$$\|\Delta_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \geq 0$$

Seuraava Besselin epäyhtälö

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$$

Suljettu funktiojoukko toteuttaa Parsevalin kaavan

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \quad \forall f \quad \text{"pituus säilyy"}$$

Täydellinen funktiojoukko:

$$(f \cdot e_k) = 0 \quad \forall e_k \Rightarrow f = 0 \quad \text{m.k.}$$

Hilbertin avaruudessa täydellinen joukko on suljettu ja päinvastoin.

Hilbert:

- lineaarinen
- $\exists$  skalaaritulo
- täydellinen normin  $\|f\|^2 = f \cdot f$  suhteen

Liapunov:  $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  suljettu välillä  $[-\pi, \pi]$ .

Plancherelin kaava

$$\int_a^b f^* g dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* d_n$$

"skalaaritulo säilyy"

Besselin epäyhtälöstä seuraa neliöllisesti integroitavalle funktiolle (s.o.  $\int_a^b |f|^2 dx < +\infty$ ) myös ominaisuus

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi x}{L}} f(x) dx \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Vähän yleisemmässä muodossa tämä tunnetaan Riemannin-Lebesguen Lemmana

$$\int_a^b e^{i\lambda x} f(x) dx \rightarrow 0 \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Jos funktio  $f$  on sileä, arviota voidaan esittää integroimalla täsmen, kuten jäljempänä nähdään.

Parsevalin kaavaa voi myös käyttää lukudaryöjen summaamiseen.

ESIM. Funktiolle  $f(x+2\pi) = f(x)$ ,  $f(x) = x$ ,  $|x| < \pi$  saatiin aikaisemmin Fourier'n sarja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx, \quad |x| < \pi$$

Tämä on laskettu normittamattomassa ortogonaalijonossa. Normitetaan:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \Rightarrow e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

Silloin Parsevalin kaava antaa

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} \sqrt{\pi} \right)^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



"Hand-waving"

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-\frac{in\pi y}{L}} dy \cdot e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

Integraaliumma:  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\Delta k = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$

$$= \sum_{k_n} \frac{\Delta k}{2\pi} e^{ixk_n} \int_{-L}^L f(y) e^{-iyk_n} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{ik(x-y)}$$

Fourier'n integraali (f paloittain sileä ja  $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K dk \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{ik(x-y)} \end{aligned}$$

Ulompi integraali on siis pääarvo integraali.  
Sisempi integraali on Fourier'n muunnos

$$F(k) = \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx}$$

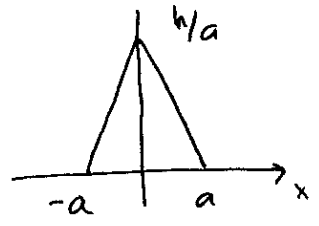
Kosinimuunnos ja sinimuunnos:

$$\tilde{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx,$$

$$\tilde{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx.$$

ESIM. Kolmiopulssin Fourier-muunnos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixk} \frac{h}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-ixk} \frac{h}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 e^{-ixk} \frac{h}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx = \frac{h/a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left[ e^{-ixk} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + e^{ixk} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] dx \\ &= \frac{h}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos kx dx = \frac{h}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \int_0^a \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial k} \int_0^a \sin kx dx \right] \\ &= \frac{h}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin ka}{k} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial k} \int_0^a \cos kx dx \right] = \frac{h}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin ka}{k} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\cos ka - 1}{k} \right] \\ &= \frac{h}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin ka}{k} - \frac{\partial \sin ka}{k^2} + \frac{1 - \cos ka}{ak^2} \right] = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos ka)}{k^2}. \end{aligned}$$

Tässä  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h$ ; rajalla  $a \rightarrow 0$  korkea ja kapea  
 pulssi, jolle  $\tilde{f}(k) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{2\pi}}$ .

Jos  $g(x)$  on jatkuva funktio, niin

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} g(\xi) \int_{-a}^a f(x) dx = h \lim_{a \rightarrow 0} g(\xi) = hg(0)$$

$|\xi| \leq a$

Niinpä funktiot  $\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

muodostavat  $\delta$ -jonon, kun  $a \rightarrow 0$ . Tällä jonolla ei ole raja-arvoa, mutta integraaleissa rajalle voidaan mennä.