

niin on voimassa asympotottinen kehitelmä

$$\int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \sim e^{\lambda f(t_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}}{\lambda^n} \Gamma(n + \frac{1}{2})$$

Samoin kuin Watsonin lemmän todistuksessa nähdään, että arvoastaman pisteeseen t_0 piene ympäristö on tärkeä, esim. $(\lambda > \lambda_0)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0+\delta}^b \varphi(t) e^{-\lambda [f(t_0) - f(t)]} dt \right| \\ &= \left| \int_{t_0+\delta}^b \varphi(t) e^{-\lambda_0 [f(t_0) - f(t)] - (\lambda - \lambda_0) [f(t_0) - f(t)]} dt \right| \\ &\leq e^{-\lambda_0 f(t_0)} e^{-(\lambda - \lambda_0)h} \int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt = O(e^{-\lambda h}) \end{aligned}$$

Funktio $\varphi(t)$ löyhtyy kääntämällä funktion f Taylorin sarja pisteeseen t_0 ympäristössä:

$$\tau^2 = f(t_0) - f(t) = -a_2(t-t_0)^2 - a_3(t-t_0)^3 - \dots$$

$$\tau = \sqrt{-a_2(t-t_0)} \sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2}(t-t_0) + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t-t_0)^n$$

mistä löyhtyy $t-t_0 = \varphi(\tau) - t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tau^n$.

Kuuntujan vaihdon jälleen saadaan

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) e^{-\lambda [f(t_0) - f(t)]} dt = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \underbrace{\varphi[\varphi(\tau)] \varphi'(\tau)}_{\chi(\tau)} e^{-\lambda \tau^2} d\tau$$

Esiponen hiäadizella funktioilla (so. virhe suunnuksioikka $e^{-\lambda \epsilon}$, $\epsilon > 0$) integrointialue voidaan tääzi symmetrisoida, ts.

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) e^{-\lambda [f(t_0) - f(t)]} dt = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \chi(\tau) e^{-\lambda \tau^2} d\tau + O(e^{-\lambda k \delta})$$

$k > 0$

$$= \int_0^{\delta_1} [\chi(\tau) + \chi(-\tau)] e^{-\lambda \tau^2} d\tau + O(e^{-\lambda k \delta}).$$

Tääzi $[\chi(\tau) + \chi(-\tau)] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \tau^{2n}$ joten Watsonin lemmän nojalla ($\beta=1$, $\alpha=2$) saadaan

$$\int_a^b \varphi(t) e^{-\lambda [f(t_0) - f(t)]} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \Gamma(n + \frac{1}{2}) \lambda^{-n - \frac{1}{2}}$$

misti seuraav väite.

ESIM. Lasketaan Γ -funktion asympottilkan johtava termi, kun $z = x \rightarrow +\infty$.

Tääzi johdetaan vaihtamaan muuttujia, iotta esiponenkin jaxdaan sopiva funktio:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t} && t \rightarrow xt \\ &= x^x \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-xt} \\ &= x^x \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-xt + x \ln t} && = x^x \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{x(\ln t - t)} \end{aligned}$$

Ääriarvokohdan ehdosta $\frac{d}{dt}(\ln t - t) = \frac{1}{t} - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$. (23)

$$\ln t - t = -1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t-1)^n (-1)^n}{n}$$

$(\ln t - t) \Big|_{t=1} - (\ln t - t) = t - 1 - \ln t$, vähenee monotonisesti nollessaan, kun $t \rightarrow 1$, kasvaa monotonisesti, kun $t > 1$.

Niinpä aina löytyy $h > 0$ s.p. $t - 1 - \ln t > h$ riittävän kaukana pisteestä $t_0 = 1$. Esimerkiksi

$$\frac{1}{2} - 1 - \ln \frac{1}{2} = 0,1931 \quad \text{ja} \quad \frac{3}{2} - 1 - \ln \frac{3}{2} = 0,0945, \quad \text{joten kun}$$

$|t-1| \geq \frac{1}{2}$ niin $t - 1 - \ln t > 0,09$. Ratkaistaan nyt $\psi(\tau) = t$ yhtälöstä

$$t - 1 - \ln t = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t-1)^n (-1)^n}{n} = \tau^2. \quad \text{Etsitään sarja}$$

$\psi(\tau) - 1 = t - 1 = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \tau^l$. Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \dots)^2}{2} - \frac{(a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots)^3}{3} + \frac{(a_1 \tau + \dots)^4}{4} \\ &= \frac{a_1^2 \tau^2 + 2a_1 a_2 \tau^3 + 2a_1 a_3 \tau^4 + a_2^2 \tau^4 + \dots}{2} - \frac{a_1^3 \tau^3 + 3a_1^2 a_2 \tau^4 + \dots}{3} + \frac{a_1^4 \tau^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

$$= \tau^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1^2}{2} = 1, \quad a_1 a_2 - \frac{a_1^3}{3} = 0, \quad a_1 a_3 + \frac{a_2^2}{2} - a_1^2 a_2 + \frac{a_1^4}{4} = 0, \dots$$

mistä $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 9} - \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{18}$

niinpä

$$t - 1 = \psi(\tau) - 1 = \sqrt{2} \tau + \frac{2}{3} \tau^2 + \frac{\sqrt{2}}{18} \tau^3 + \dots$$

$$\psi'(\tau) = \sqrt{2} + \frac{4}{3} \tau + \frac{\sqrt{2}}{9} \tau^2 + \dots \quad \text{mistä löytyy} \quad dt = \psi'(\tau) d\tau.$$

Saadetaan siis

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{x(\ln t - t)} \stackrel{1+\delta}{\sim} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{dt}{t} e^{-x} e^{x(+1-\ln t)}$$

$$\stackrel{\delta'}{\sim} \int_{-\delta'}^{\delta'} dt \frac{(\sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \frac{\sqrt{2}}{9}\tau^2 + \dots)}{(1 + \sqrt{2}\tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \dots)} e^{-x} e^{-x\tau^2}$$

$$\stackrel{\delta'}{\sim} e^{-x} \int_{-\delta'}^{\delta'} dt (1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\tau + \dots) e^{-x\tau^2}$$

$$\stackrel{\delta'}{\sim} e^{-x} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\tau}{\sqrt{x}} + \dots) e^{-\tau^2} \sim e^{-x} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \sqrt{\pi} (1 + o(\frac{1}{x}))$$

↑ pariton ↑ parillinen

loppujen lopuksi siis

$$\Gamma(x) \sim x^x e^{-x} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Tämä asymptotikka pätee itse asiassa koko kompleksitasossa negatiivista reaaliosaa lukuunottamatta, s.o.

$$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi} \left[1 + o\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad |\arg z| < \pi, \quad |z| \rightarrow \infty$$

mutta sen todistaminen imaginaariosien vasemmalla puolella vaatii muita menetelmiä.

ESIM. Suprajohtavuuden BCS-teoriassa keskeinen parametri on johtavuuselektronien spektrin aukko (gap) Fermipinnan lähellä. Sille saadaan yhtälö

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = 2 I \left(\frac{\Delta(T)}{T} \right), \quad \text{missä}$$

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 1}.$$

Matalissa lämpötiloissa tarvitaan asymptotinen $y \rightarrow \infty$, jonka voi johtaa Laplacen menetelmällä.

Kun y on suuri, on ilmeistä, että

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \left(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}} + \dots \right)$$

$$\sim \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \underset{x \rightarrow xy}{=} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y\sqrt{x^2+1}}$$

Funktiolla $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$ on maksimi pisteessä $x=0$.

Vaihdetaan muuttujaa: $f(0) - f(x) = 1 + \sqrt{x^2+1} = \tau^2$

$$\sqrt{x^2+1} = \tau^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \sqrt{\tau^2-1} - 1 = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{8}\tau^4 + \dots$$

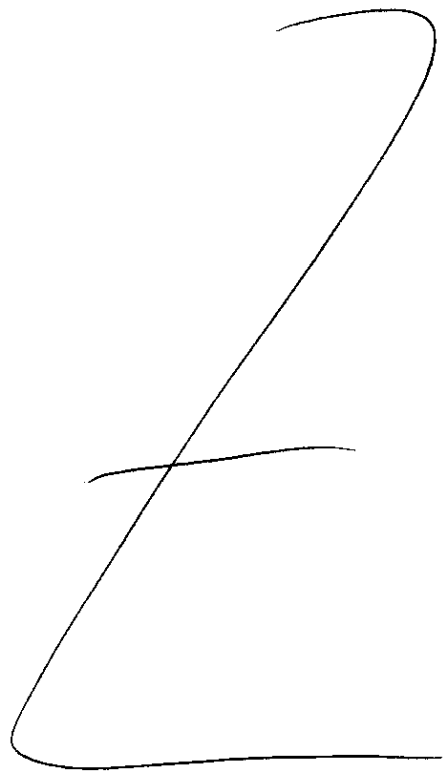
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau - \frac{1}{8\sqrt{2}}\tau^3 + \dots \quad dx = \frac{d\tau}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{3}{8}\tau^2 \right)$$

Nänpä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y\sqrt{x^2+1}} \sim e^{-y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{2}} \frac{(1 - \frac{3}{8}\tau^2 + \dots)}{1+\tau^2} e^{-y\tau^2}$$

$$\sim e^{-y} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\tau^2} d\tau = e^{-y} \sqrt{\frac{\pi}{2y}} \quad \text{Nähdään siis, että}$$

$$I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left[1 + O\left(\frac{1}{y}\right) \right],$$



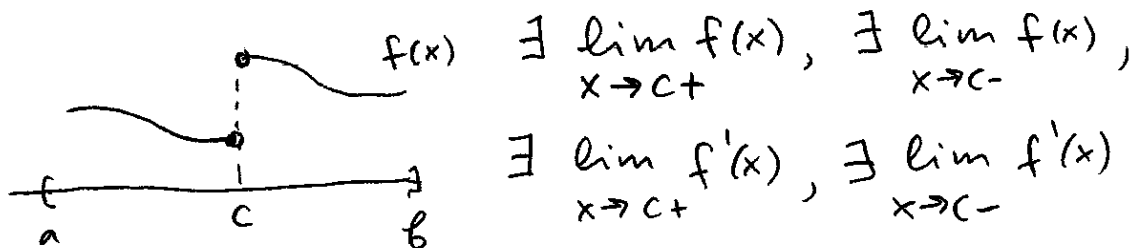
Jatkuvia funktioita approksimoitaessa trigonometriset funktiot ovat hyödyllisiä:

$$f(x) = f(x+2\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Tämä on Fourier-sarja, kun

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

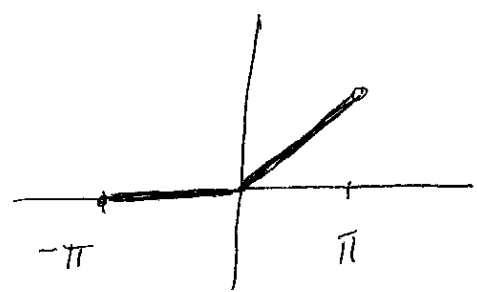
Paloittain sileä funktio on jatkuvasti derivoituva erillisiä epäjatkuvuuskohtia lukuunottamatta, joissa funktioilla ja sen derivaatoilla on äärelliset raja-arvot



Lause. Paloittain sileän funktion Fourier-sarja suppenee s.e.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) \\ \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)], & \text{kun} \\ & \lim_{y \rightarrow x+0} f(y) \neq \lim_{y \rightarrow x-0} f(y) \\ \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)], & \text{kun } x = \pm \pi \end{cases}$$

ESIM. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dk} \int_0^{\pi} \sin kx dx \Big|_{k=n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dk} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right] \Big|_{k=n} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} (1 - \cos k\pi) \right] \Big|_{k=n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{k^2} (1 - \cos k\pi) + \frac{\pi \sin k\pi}{k} \right] \Big|_{k=n} = -\frac{1}{\pi n^2} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n=2m \\ -\frac{2}{\pi(2m+1)^2}, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi (-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Nümpä

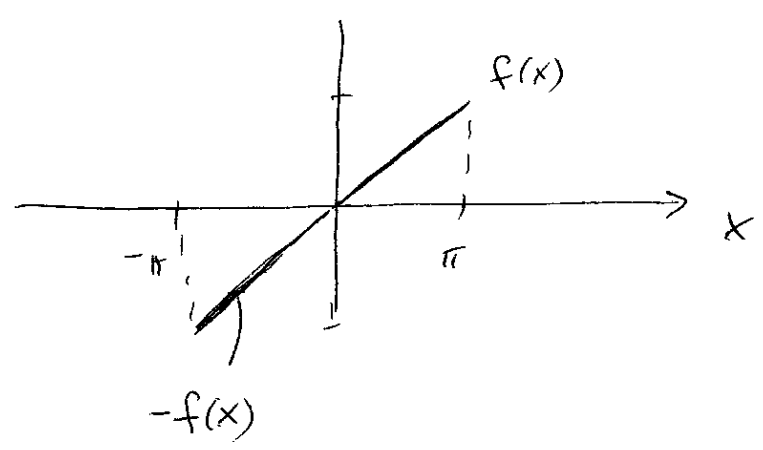
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \right]$$

ESIM. $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$. Sinisarja.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{ (laskettiin edellä).}$$

Näinpä $f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$.

Tämä on samalla funktion $f(x) = x, |x| \leq \pi$ tavallinen Fourier-sarja.

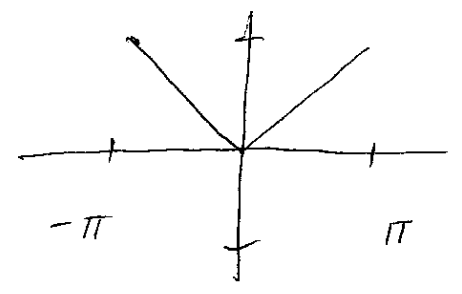


ESIM. $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$. Kosinisarja.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & n=2m \\ \frac{4}{\pi(2m+1)^2}, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$



Näistä lukusarjojen summia.

ESIM.
$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$$x=0 : 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Pareillisuuteen voidaan lisätä, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{ja}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$