niin on voimassa asymptoottinen kehitelmä

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\,dt \sim e^{\lambda f(t_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^n} \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) .$$

Samoin kuin Watsonin lemman todistuksessa nähdään, että ainoastaan pisteen t_0 pieni ympäristö on tärkeä, esim. $(\lambda > \lambda_0)$

$$\left| \int_{t_0+\delta}^{b} \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{t_0+\delta}^{b} \varphi(t)\, e^{-\lambda_0[f(t_0)-f(t)] - (\lambda-\lambda_0)[f(t_0)-f(t)]} \right|$$

$$\leq e^{-\lambda_0 f(t_0)}\, e^{-(\lambda-\lambda_0)h} \int_a^b |\varphi(t)|\, e^{\lambda_0 f(t)}\,dt = O(e^{-\lambda h}).$$

Funktio $\Psi(\tau)$ löytyy kääntämällä funktion f Taylorin sarja pisteen t_0 ympäristössä:

$$\tau^2 = f(t_0) - f(t) = -a_2(t-t_0)^2 - a_3(t-t_0)^3 - \dots$$

$$\tau = \sqrt{-a_2}\,(t-t_0)\sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2}(t-t_0) + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (t-t_0)^n$$

mistä löytyy $t - t_0 = \Psi(\tau) - t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tau^n$.

Muuttujan vaihdon jälkeen saadaan

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}\,dt = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \underbrace{\varphi[\Psi(\tau)]\,\Psi'(\tau)}_{\chi(\tau)}\, e^{-\lambda\tau^2}\,d\tau .$$

Eksponentiaalisella tarkkuudella (so. virhe suuruusluokkaa $e^{-\lambda\varepsilon}$, $\varepsilon>0$) integroimisalue voidaan tässä symmetrisoida, ts.

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0-\delta} \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}\, dt = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \chi(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau + O\left(e^{-\lambda k\delta}\right)$$

$k>0$

$$= \int_0^{\delta_1} [\chi(\tau)+\chi(-\tau)]\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau + O\left(e^{-\lambda k\delta}\right).$$

Tässä $[\chi(\tau)+\chi(-\tau)] = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\,\tau^{2n}$ joten Watsonin lemman nojalla ($\beta=1$, $\alpha=2$) saadaan

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}\, dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\lambda^{-n-\frac{1}{2}}$$

mistä seuraa väite.

ESIM. Lasketaan Γ-funktion asymptotiikan johtava termi, kun $z=x\to+\infty$.

Tässä joudutaan vaihtamaan muuttujaa, jotta eksponenttiin saadaan sopiva funktio:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}\, e^{-t} \underset{t\to xt}{=} x^x \int_0^\infty dt\, t^{x-1}\, e^{-xt}$$

$$= x^x \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, e^{-xt+x\ln t} = x^x \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, e^{x(\ln t - t)}$$

Ääriarvokohta ehdosta $\frac{d}{dt}(\ln t - t) = \frac{1}{t} - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$. (23)

$$\ln t - t = -1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t-1)^n(-1)^n}{n}.$$

$(\ln t - t)\big|_{t=1} - (\ln t - t) = t - 1 - \ln t$, vähenee monotonisesti nollaan, kun $t \to 1$, kasvaa monotonisesti, kun $t > 1$. Niinpä aina löytyy $h > 0$ s.e. $t - 1 - \ln t > h$ riittävän kaukana pisteestä $t_0 = 1$. Esimerkiksi $\frac{1}{2} - 1 - \ln\frac{1}{2} = 0{,}1931$ ja $\frac{3}{2} - 1 - \ln 3/2 = 0{,}0945$, joten kun $|t-1| \geq \frac{1}{2}$ niin $t - 1 - \ln t > 0{,}09$. Ratkaistaan nyt $\psi(\tau) = t$ yhtälöstä

$$t - 1 - \ln t = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t-1)^n(-1)^n}{n} = \tau^2.$$

Etsitään sarja

$\psi(\tau) - 1 = t - 1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \tau^\ell$. Sijoittamalla saadaan

$$\frac{(a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \dots)^2}{2} - \frac{(a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots)^3}{3} + \frac{(a_1\tau + \dots)^4}{4}$$

$$= \frac{a_1^2\tau^2 + 2a_1a_2\tau^3 + 2a_1a_3\tau^4 + a_2^2\tau^4 + \dots}{2} - \frac{a_1^3\tau^3 + 3a_1^2a_2\tau^4 + \dots}{3} + \frac{a_1^4\tau^4}{4} + \dots$$

$$= \tau^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1^2}{2} = 1, \quad a_1a_2 - \frac{a_1^3}{3} = 0, \quad a_1a_3 + \frac{a_2^2}{2} - a_1^2a_2 + \frac{a_1^4}{4} = 0, \dots$$

mistä

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 9} - \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

niinpä

$$t - 1 = \psi(\tau) - 1 = \sqrt{2}\,\tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}\tau^3 + \dots$$

$\psi'(\tau) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \frac{\sqrt{2}}{9}\tau^2 + \dots$ mistä löytyy $dt = \psi'(\tau)\,d\tau$.

Saadaan siis

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, e^{x(\ln t - t)} \sim \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{dt}{t}\, e^{-x}\, e^{x(t-1-\ln t)}$$

$$\sim \int_{-\delta'}^{\delta'} d\tau\, \frac{\left(\sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \frac{\sqrt{2}}{9}\tau^2 + \dots\right)}{\left(1 + \sqrt{2}\tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \dots\right)}\, e^{-x}\, e^{-x\tau^2}$$

$$\sim e^{-x}\sqrt{2}\int_{-\delta'}^{\delta'} d\tau \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\tau + \dots\right) e^{-x\tau^2}$$

$$\sim e^{-x}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(1 - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\tau}{\sqrt{x}}}_{\text{pariton}} + \dots\right) \underbrace{e^{-\tau^2}}_{\text{parillinen}} \sim e^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}}\sqrt{\pi}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Loppujen lopuksi siis

$$\Gamma(x) \sim x^x e^{-x}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Tämä asymptotiikka pätee itse asiassa koko kompleksitasossa negatiivista reaaliakselia lukuunottamatta, so.

$$\Gamma(z) \underset{|z|\to\infty}{\sim} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\sqrt{2\pi}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad |\arg z| < \pi,$$

mutta sen todistaminen imaginaariakselin vasemmalla puolella vaatii muita menetelmiä.

ESIM. Suprajohtavuuden BCS-teoriassa keskeinen parametri on johtavuuselektronien spektrin aukko (gap) Fermipinnan lähellä. Sille saadaan yhtälö

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = 2\, I\left(\frac{\Delta(T)}{T}\right), \quad \text{missä}$$

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}+1}.$$

Matalissa lämpötiloissa tarvitaan asymptotiikka $y \to \infty$, jonka voi johtaa Laplacen menetelmällä. Kun y on suuri, on ilmeistä, että

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \left(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}} + \dots\right)$$

$$\sim \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \underset{x \to xy}{=} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y\sqrt{x^2+1}}$$

Funktiolla $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$ on maksimi pisteessä $x=0$. Vaihdetaan muuttujaa: $f(0) - f(x) = -1 + \sqrt{x^2+1} = \tau^2$

$$\sqrt{x^2+1} = \tau^2+1 \Rightarrow x^2 = \sqrt{\tau^2+1} - 1 = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{8}\tau^4 + \dots$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau - \frac{1}{8\sqrt{2}}\tau^3 + \dots \qquad dx = \frac{d\tau}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{3}{8}\tau^2 \dots\right)$$

Niinpä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\, e^{-y\sqrt{x^2+1}} \sim e^{-y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{2}}\, \frac{\left(1-\frac{3}{8}\tau^2+\dots\right)}{1+\tau^2}\, e^{-y\tau^2}$$

$$\sim e^{-y}\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\tau^2}\, d\tau = e^{-y}\sqrt{\frac{\pi}{2y}} .$$

Nähdään siis, että

$$I(y) \underset{y\to\infty}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\, \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left[1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right].$$

FOURIER – SARJAT

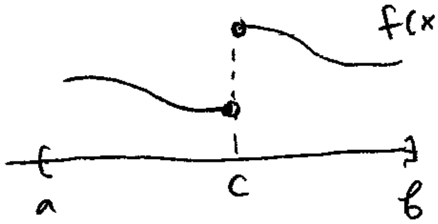
Jaksollisia funktioita approksimoitaessa trigonometriset funktiot ovat hyödyllisiä:

$$f(x) = f(x+2\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Tämä on Fourier-sarja, kun

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Paloittain sileä funktio on jatkuvasti derivoituva erillisiä epäjatkuvuuskohtia lukuunottamatta, joissa funktiolla ja sen derivaatalla on äärelliset raja-arvot



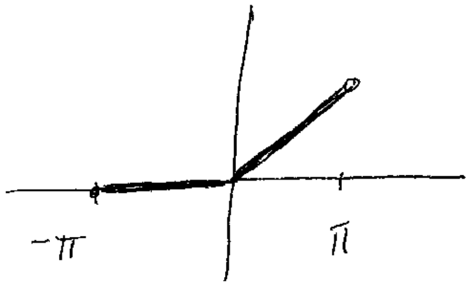
$$\exists \lim_{x\to c+} f(x), \quad \exists \lim_{x\to c-} f(x),$$

$$\exists \lim_{x\to c+} f'(x), \quad \exists \lim_{x\to c-} f'(x).$$

Lause. Paloittain sileän funktion Fourier-sarja suppenee s.e.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } \lim_{y\to x} f(y) = f(x) \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & \text{kun } \lim_{y\to x+0} f(y) \neq \lim_{y\to x-0} f(y) \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)], & \text{kun } x = \pm \end{cases}$$

<u>ESIM.</u> $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi \\ 0, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big/_0^\pi \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dk}\int_0^\pi \sin kx\,dx\Big|_{k=n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dk}\Big/_0^\pi \frac{-\cos kx}{k}\Big|_{k=n} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dk}\frac{1}{k}\left(1-\cos k\pi\right)\Big|_{k=n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k^2}(1-\cos k\pi) + \frac{\pi\sin k\pi}{k}\right]\Big|_{k=n} = -\frac{1}{\pi n^2}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ -\frac{2}{\pi(2m+1)^2}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\Big/_0^\pi \frac{x\cos nx}{n}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\Big/_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Niimpä

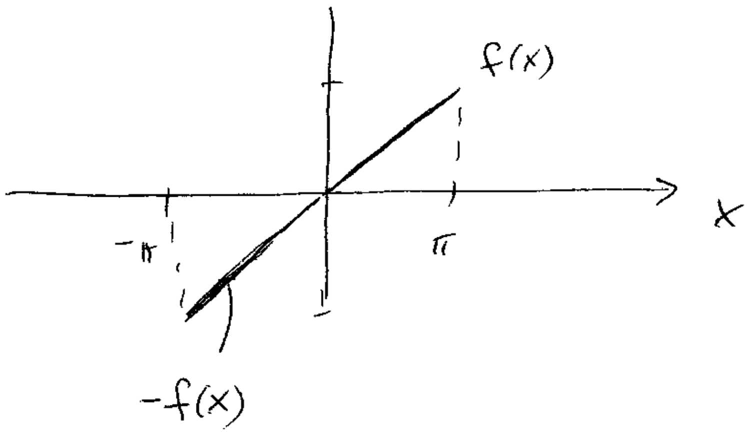
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx - \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\right].$$

ESIM. $f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$. Sinisarja.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad \text{(laskettiin edellä)}.$$

Niinpä $$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx.$$

Tämä on samalla funktion $f(x)$ x, $|x| \le \pi$ tavallinen Fourier-sarja.

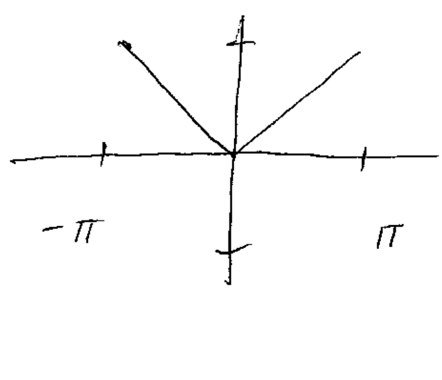


ESIM. $f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$. Kosinisarja.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ -\dfrac{4}{\pi(2m+1)^2}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \, dx = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$



Näistä lukusarjojen summia.

ESIM. $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$x = 0$: $$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Parillisetkin voidaan lisätä, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ ja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$