FYSIIKAN MATEMAATTISET MENETELMÄT Ib

Eulerin funktiot

1. lajin Eulerin integraali

$$B(p,q) = \int_0^1 dt\, t^{p-1}(1-t)^{q-1}.$$

Suppenee, kun $\mathrm{Re}\,p > 0$, $\mathrm{Re}\,q > 0$. Määrittelee tällä alueella Eulerin B-funktion (beetafunktion).

2. lajin Eulerin integraali

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

Ylärajalle suppenee $\forall z \in \mathbb{C}$, alarajalla $\mathrm{Re}\,z > 0$. So. määrittelee z-tason oikeassa puolitasossa analyyttisen funktion, Eulerin Γ-funktion (gammafunktion).

Γ-funktio esiintyy usein statistisessa fysiikassa.

ESIM. Maxwellin jakauma. Todennäköisyys, että ideaalikaasussa (klassisessa) molekyylin vauhti on välillä $[v, v+dv]$ on

$P(v,dv) = f(v)\,dv$, missä $f(v) = Cv^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}}$

normitusvakio

$k_B = 1$

Tässä normitus on $\int_0^\infty dv\, f(v) = 1.$

Keskivauhti $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\, dv$.

Neliöllinen keskivauhti (rms speed)

$$\langle v \rangle^2 = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv$$

(kun keskinopeus on nolla). Pitää siis laskea integraali

$$I\left(\frac{m}{T}, n\right) = \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^{n-1} dv.$$

Muuttujanvaihto: $\frac{mv^2}{2T} = t \Rightarrow dt = \frac{m}{T} v dv$

$$I\left(\frac{m}{T}, n\right) = \frac{T}{m} \int_0^\infty dt\, e^{-t} \left(\frac{2T}{m} t\right)^{\frac{n-2}{2}} = 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt$$

$$= 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Normitustekijä

$$1 = C \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv = C\, I\left(\frac{m}{T}, 3\right) = C \sqrt{2} \left(\frac{T}{m}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Myöhemmin nähdään, että $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Siispä

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \Rightarrow f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}}.$$

Tästä seuraa heti

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{T}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2T}}dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} I\left(\frac{m}{T}, 4\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} 2\left(\frac{T}{m}\right)^2 \Gamma(2) = \sqrt{\frac{8T}{\pi m}}.$$

Tässä $\Gamma(2) = \int_0^\infty e^{-t}\, t\, dt = 1$ kuten osittain integroimalla nähdään.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} I\left(\frac{m}{T}, 5\right)} = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} 2^{3/2}\left(\frac{T}{m}\right)^{5/2}\Gamma(5/2)}$$

$$= \sqrt{\frac{3T}{m}},$$ sillä $\Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

<u>ESIM.</u> Gaussin integraali $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx \quad (a>0)$

$$= 2\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{\frac{a}{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt$$

$ax^2 = t$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\Gamma(1/2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Z

Rekursiokaava Γ-funktiolle

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$$

antaa kokonaisluku- ja puolilukuarvot, kun tunnetaan $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ ja $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Erityisesti

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$$

$= n!$ — kertomafunktion yleistys!

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

Palautuskaava

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}}$$

Tässä vasemmalla on

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{z-1} \int_0^\infty du\, e^{-u}\, u^{-z}\, du$$

$u = y^2$, $t = x^2$

$$= 4\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, xy\, e^{-x^2-y^2} \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^z \frac{1}{x^2}$$

Napakoordinaateissa $dxdy = r\,dr\,d\varphi$, $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

saadaan

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = 4\int_0^\infty dr\, r \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{2z-1} e^{-r^2}$$

Radiaali-integraali on nyt helppo

$$2\int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2} = 1 \, .$$

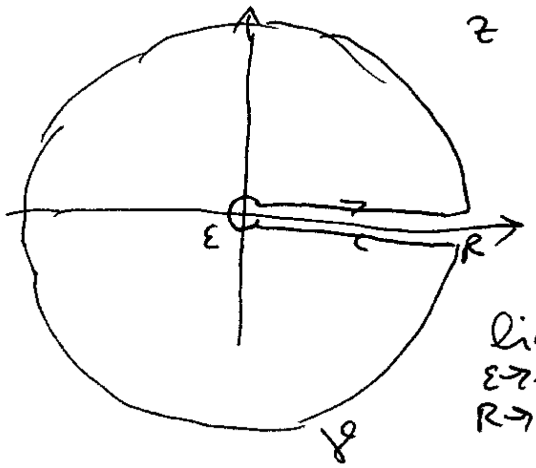
Kulmaintegraalissa muuttujanvaihto $x = \cot^2\varphi$

$$dx = -2\cot\varphi \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -2\cot\varphi\left(1+\cot^2\varphi\right)d\varphi \quad \text{antaa}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{2a-1} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} \, ,$$

suppenee, kun $1 > \mathrm{Re}\, a > 0$.

Residylauseen apuintegraali:



Kaari-integraalit häviävät, kun $\varepsilon \to 0$ ja $R \to \infty$ (kun $1 > \mathrm{Re}\, a > 0$).

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_\gamma \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

$$+ \int_\infty^0 \frac{e^{2i\pi a}\, x^{a-1}\,dx}{1+x} \, ,$$

sillä yläreunalla potenssin päähaara

$$z^{a-1} = e^{(a-1)\ln z} = e^{(a-1)\left[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)\right]}$$

$$= e^{(a-1)\left[\ln|z| + i\arg z\right]} \xrightarrow[\arg z \to 0+]{} |z|^{a-1} = x^{a-1} \, .$$

Haara vaihtuu neg. reaaliakselilla, jolta integrandi pysyy jatkuvana ja myös analyyttisenä:

$$e^{(a-1)[\ln|z| + i\arg z]} \xrightarrow[\arg z \to \pi]{} e^{(a-1)[\ln|z| + i\pi]}$$

$$e^{(a-1)[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi)]} \xrightarrow[\arg z \to -\pi]{} e^{(a-1)[\ln|z| + i\pi]}$$

Leikkauksen alareunalla siis potenssin haara $n=1$:

$$z^{a-1} \xrightarrow[\arg z \to 0-]{} e^{(a-1)[\ln|z| + i2\pi]} = x^{a-1} e^{(a-1)2\pi i}$$

$= e^{2\pi a i} x^{a-1}$. Toisaalta residylauseen mukaan

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\partial E} \frac{z^{a-1} dz}{1+z} = 2\pi i \; z^{a-1}\Big|_{z=-1}$$

$$= 2\pi i \lim_{\substack{\arg z \to \pi \\ |z| = 1}} e^{(a-1)[\ln|z| + i\arg z]} = 2\pi i \, e^{(a-1)i\pi}$$

$= -2\pi i e^{ai\pi}$. Kootaan yhteen:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = \frac{-2\pi i e^{ai\pi}}{1 - e^{2i\pi a}} = \frac{-2i}{e^{-ia\pi} - e^{ia\pi}} \pi = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Kun palautuskaavassa pannaan $z = \frac{1}{2}$, saadaan

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}},$$

sillä $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt > 0.$$

Tutkitaan Γ-funktion analyyttisyyttä imaginaariakselin vasemmalla puolella.

Epäoleellisuus molemmissa päissä, jaetaan:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 dt\, t^{z-1} e^{-t} + \int_1^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}$$

Jälkimmäisessä integraalissa

$$|t^{z-1}| = |t^{x+iy-1}| = t^{x-1}$$

ja missä tahansa vyössä $-\tilde{X}_0 \le \operatorname{Re} z \le X_0$ integraali suppenee tasaisesti z:n suhteen

$$\Rightarrow \int_1^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

– kokonainen funktio.

Kun $\operatorname{Re} z > 0$, myös integraalissa

$$\int_0^1 dt\, t^{z-1} e^{-t}$$ epäoleellinen integraali

(rajalla $t \to 0$) suppenee. Tällä välillä exp. voidaan kehittää ja integroida termeittäin:

$$\int_0^1 dt\, t^{z-1} e^{-t} = \int_0^1 dt\, t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 dt\, t^{n+z-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(n+z)}$$

Tästä eteenpäin tarvitaan analyyttistä jatkamista.

Analyyttinen funktio on yksikäsitteinen, jos sen tuntee pienelläkin alueella, tähän perustuu analyyttisen jatkamisen periaate, jonka nojalla esitys

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} dt\, t^{z-1} e^{-t},$$

joka alunperin on siis voimassa kun $\mathrm{Re}\, z > 0$, analyyttisen jatkamisen periaatteen nojalla antaa Γ-funktion koko kompleksitasossa.

Tästä nähdään navat ja residyt, mutta integraalista tuleva kokonainen funktio on hankala tutkia erikseen. Vaihtoehto analyyttiseen jatkamiseen on rekursiokaava

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$$

Oikealla puolella integraaliesitys antaa analyyttisen funktion, kun $\mathrm{Re}(z+1) > 0$, jolloin vasen puoli määrittelee Γ-funktion alueessa $\mathrm{Re}\, z > -1$. Alueessa $\mathrm{Re}\, z > -2$ analyyttinen jatko kaavasta

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2)$$

jne.

ESIM. Määritä alue, jossa integraalilla määritelty funktio

$$f(z) = \int_0^\infty dt \, \frac{t^{n-1}}{e^t \frac{1}{z} + 1}, \quad n > 0$$

on analyyttinen.

Kirjoitetaan vähän eri muotoon

$$f(z) = z \int_0^\infty dt \, \frac{t^{n-1}}{e^t + z}.$$

Ylärajan epäoleellisen integraalin tasaisen suppenemisen takaa eksponentti, sillä

$$\left| \frac{1}{e^t + z} \right| \leq \frac{1}{e^t - |z|} < \frac{1}{e^t - R}, \quad \begin{array}{l} |z| < R \\ e^t > R \end{array}$$

$$< \frac{2}{e^t}, \quad \text{kun } e^t > 2R.$$

Kun $|z+1| \geq \delta > 0$, origon epäoleellinen integraali suppenee myös tasaisesti, sillä

$$\left| \frac{1}{e^t + z} \right| = \left| \frac{1}{e^t - 1 + z + 1} \right| \leq \frac{1}{\left| e^t - 1 - |z+1| \right|}$$

$$\leq \frac{1}{\delta + 1 - e^t} \leq \frac{2}{\delta}, \quad \text{kun } e^t - 1 \leq \frac{\delta}{2}$$

Ongelmaksi jäävät nimittäjän nollakohdat, jolloin saadaan yhtälöstä

$$e^{t} + z = 0 \iff z = -e^{t}.$$

Nämä kattavat z-tason negatiivisen reaaliakselin pisteestä $z=-1$ pisteeseen $z=\infty$.

Niinpä integraali määrittelee funktion $f(z)$ analyyttiseksi funktioksi ~~kompleksitasossa, josta~~ on poistettu säde $[-1,\infty)$.

Tämän integraalin määrittelemä funktio on keskeinen ideaalisen fermionikaasun statistiikassa ja tunnetaan mm. polylogaritmin nimellä (muitakin nimiä käytetään). Identifikaatio on seuraava.

Kun $|z|<1$, voidaan kehittää geometriseksi sarjaksi ja integroida termeittäin: $f(z) =$

$$= z\int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-t} \sum_{m=0}^{\infty} (-z e^{-t})^m = z \sum_{m=0}^{\infty} (-z)^m \int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-t(m+1)}$$

$$t(m+1) \to t$$

$$= z\sum_{m=0}^{\infty} (-z)^m \frac{1}{(m+1)^n} \int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-t} = -\Gamma(n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m^n} = -\Gamma(n)\, Li_n(-z).$$

Saadaan siis esitys

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{n-1}}{e^{t}\frac{1}{z} + 1} = -\Gamma(n)\, Li_n(-z),$$

missä on käytetty sarjaesitystä $Li_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^n}$ polylogaritmille kertalukua n.