

Eulerin funktiot

1. lajin Eulerin integraali:

$$B(p, q) = \int_0^1 dt t^{p-1} (1-t)^{q-1}$$

Suppenee, kun $\text{Re } p > 0$, $\text{Re } q > 0$. Määrittelee tällä alueella Eulerin B-funktion (beetafunktion).

2. lajin Eulerin integraali:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

ylärajalle suppenee $\forall z \in \mathbb{C}$, alarajalla $\text{Re } z > 0$.
 So. määrittelee z -tason oikeassa puolikuvassa analyttisen funktion, Eulerin Γ -funktion (gammafunktion).

Γ -funktio esiintyy usein statistisessa fysiikassa.

ES 11. Maxwellin jakauma. Todennäköisyys, että ideaalikaasussa (klassisessa) molekyylin vauhti on välillä $[v, v+dv]$ on

$$P(v, dv) = f(v) dv, \text{ missä } f(v) = C v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}}$$

\nearrow normitusvakio

$\nwarrow k_B = 1$

Tämä normitus on $\int_0^{\infty} dv f(v) = 1$.

Keskivauhti $\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$

(2)

Neliöllinen keskivauhti (rms speed)

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

(kun keskinopeus on nolla). Pitää siis laskea integraalin

$$I\left(\frac{m}{T}, n\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^{n-1} dv.$$

Muuttujanvaihto:

$$\frac{mv^2}{2T} = t \Rightarrow dt = \frac{m}{T} v dv$$

$$\begin{aligned} I\left(\frac{m}{T}, n\right) &= \frac{T}{m} \int_0^{\infty} dt e^{-t} \left(\frac{2T}{m} t\right)^{\frac{n-2}{2}} = 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Normitustekijä

$$1 = C \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv = C I\left(\frac{m}{T}, 3\right) = C \sqrt{2} \left(\frac{T}{m}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Muutenkin nähdään, että $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Siis pä

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \Rightarrow f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}}$$

(3)

Tästä senon heti

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} I\left(\frac{m}{T}, 4\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} 2 \left(\frac{T}{m}\right)^2 \Gamma(2) = \sqrt{\frac{8T}{\pi m}}$$

Tästä $\Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t dt = 1$ luten oittain integraamalla
näkään.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} I\left(\frac{m}{T}, 5\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} 2^{3/2} \left(\frac{T}{m}\right)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3T}{m}}, \text{ sillä } \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

ESIM. Gaussin integraali $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (a > 0)$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-t} \sqrt{\frac{a}{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt$$

$$ax^2 = t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Z

Rekursio kaava Γ -funktiolle

(4)

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

antaa kokonaislukujen ja ∞ reoli luvun arvot,
kun tunnetaan $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ja

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad \text{Ehtyisessä}$$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

$= n!$ - kertomafunktion gleyshys!

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Palautuskaava

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Tässä vasemmalla on

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \int_0^{\infty} du e^{-u} u^{-z} du$$

$$u = y^2, \quad t = x^2$$

$$= 4 \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy x y e^{-x^2-y^2} \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^z \frac{1}{x^2}$$

Napa koordinaateissa $dx dy = r dr d\varphi$, $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

saadaan

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\infty} dr r \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{2z-1} e^{-r^2}$$

Radiaali-integraali on nyt helppo

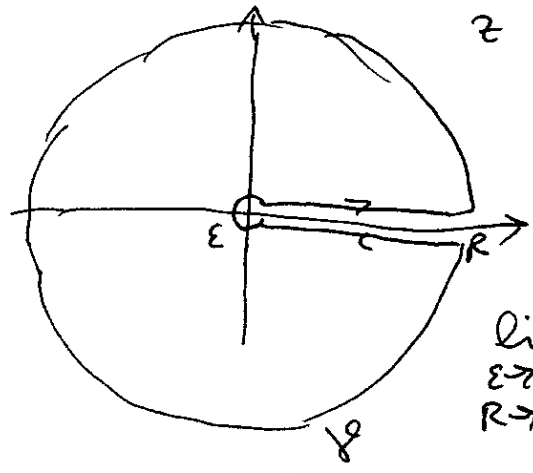
$$2 \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = 1$$

Kulma-integraalissa muutujanvaihto $x = \cot^2\varphi$

$$dx = -2\cot\varphi \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -2\cot\varphi(1+\cot^2\varphi) d\varphi \text{ antaa}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{2a-1} = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x} \text{ suppenee, kun } 1 > \text{Re} a > 0$$

Residylauseen apu-integraali:



Kaari-integraalit häviävät, kun $\epsilon \rightarrow 0$ ja $R \rightarrow \infty$ (kun $1 > \text{Re} a > 0$).

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma} \frac{z^{a-1} dz}{1+z} = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$$

$$+ \int_{\infty}^0 \frac{e^{2i\pi a} x^{a-1} dx}{1+x}$$

sillä yläreunalla potenssin

pääosa $z^{a-1} = e^{(a-1)\ln z} = e^{(a-1)[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)]}$
 $= e^{(a-1)[\ln|z| + i\arg z]}$ $\xrightarrow{\arg z \rightarrow 0^+} |z|^{a-1} = x^{a-1}$

Haava vaihtuu neg. reaaliakselilla, josta integrandi pysyy palautuvas ja myös analyttinen:

$$e^{(a-1)[\ln|z| + i \arg z]} \xrightarrow{\arg z \rightarrow \pi} e^{(a-1)[\ln|z| + i\pi]}$$

$$e^{(a-1)[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi)]} \xrightarrow{\arg z \rightarrow -\pi} e^{(a-1)[\ln|z| + i\pi]}$$

Leikkauksen alareunalla siis potenssi kaava n=1:

$$z^{a-1} \xrightarrow{\arg z \rightarrow 0^-} e^{(a-1)[\ln|z| + i2\pi]} = x^{a-1} e^{(a-1)2\pi i}$$

$$= e^{2\pi a i} x^{a-1} \quad \text{Toisaalta reidy lauseen mukaan}$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma} \frac{z^{a-1} dz}{1+z} = 2\pi i \left. z^{a-1} \right|_{z=-1}$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{\substack{\arg z \rightarrow \pi \\ |z|=1}} e^{(a-1)[\ln|z| + i \arg z]} = 2\pi i e^{(a-1)i\pi}$$

$$= -2\pi i e^{ai\pi} \quad \text{Kootaan yhteen:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = \frac{-2\pi i e^{ai\pi}}{1 - e^{2i\pi a}} = \frac{-2i}{e^{-ia\pi} - e^{ia\pi}} \pi = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Kun polankisäännössä pannaan $z = \frac{1}{2}$,
saadaan

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

Sillä $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt > 0$.

Tutkitaan Γ -funktion analyyttisyyttä
imaginaariakselin vasemmalla puolella.

Epäoleellisuus molemmista päistä, jaetaan:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 dt t^{z-1} e^{-t} + \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}$$

Jäljimmäisestä integraalista

$$|t^{z-1}| = |t^{x+iy-1}| = t^{x-1}$$

ja missä tahansa välillä $-\infty < \text{Re } z \leq x_0$
integrointi suppenee tasaisesti z :n suhteen

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

- kokonaisfunktioksi.

Kun $\text{Re } z > 0$, myös integraalista

$$\int_0^1 dt t^{z-1} e^{-t}$$

epäoleellinen integraali.

(rajalla $t \rightarrow 0$) suppenee. Tällä välikäällä exp.
voidaan kehittää ja integroida termittain:

$$\int_0^1 dt t^{z-1} e^{-t} = \int_0^1 dt t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 dt t^{n+z-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(n+z)}$$

Tästä eteenpäin jarritetaan analyysiä jatkamista.

Analyttinen funktio on yläkäsitteinen, jos sen funktion pienelläkin alueella, tähän perustuen analyttisen jatkamisen periaate, jonka nojalla esitys

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t},$$

joka aluerivin

on siis voimassa kun $\text{Re } z > 0$,

analyttisen jatkamisen periaatteen nojalla antaa Γ -funktion lause kompleksitasossa.

Tästä nähdään uavat ja residyt, mutta integraalista tuleva lauseinen funktio on kannalta tulkia erikseen. Vaihtoehto analyttisen jatkamiseen on rekursio lause

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$$

Oikealla puolella integraaliesitys antaa analyttisen funktion, kun $\text{Re}(z+1) > 0$, jolloin vasen puoli määrittelee Γ -funktion alueessa $\text{Re } z > -1$. Alueessa $\text{Re } z > -2$ analyttinen jatke kaavasta

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2)$$

jne.

ESIM.

Määritä alue, jossa integraalilla
määritelty funktio

$$f(z) = \int_0^{\infty} dt \frac{t^{n-1}}{e^t \frac{1}{z} + 1}, \quad n > 0$$

on analyttinen.

Kirjoitetaan vähän eri muotoon

$$f(z) = z \int_0^{\infty} dt \frac{t^{n-1}}{e^t + z}.$$

Glörajan epäoleellisen integraalin tasaisen
suppeneamisen tapaan eksponentti, sillä

$$\left| \frac{1}{e^t + z} \right| \leq \frac{1}{e^t - |z|} < \frac{1}{e^t - R}, \quad \begin{array}{l} |z| < R \\ e^t > R \end{array}$$

$$< \frac{2}{e^t}, \quad \text{kun } e^t > 2R.$$

Kun $|z+1| \geq \delta > 0$, origon epäoleellinen
integraali suppenee myös tasaisesti, sillä

$$\left| \frac{1}{e^t + z} \right| = \left| \frac{1}{e^t - 1 + z + 1} \right| \leq \frac{1}{|e^t - 1 - |z+1||}$$

$$\leq \frac{1}{\delta + 1 - e^t} \leq \frac{2}{\delta}, \quad \text{kun } e^t - 1 \leq \frac{\delta}{2}.$$

Ongelmat jätävät nimittäjän nollelehdet, jotta saadaan yhtälöstä

$$e^t + z = 0 \Rightarrow z = -e^t$$

Näin kattavat z-tason negatiivisen reaali-akselin pisteestä z = -1 pisteeseen z = ∞.

Niinpä integraali määrittelee funktion f(z) analyyttisenä funktiona kompleksitasossa, josta on poistettu väli [-1, ∞).

Tämän integraalin määrittämä funktio on keskeinen ideaalisen fermionikaasun statistiikassa ja tunnetaan mm. polylogaritmin nimellä (nimitetään nimellä käytetään). Identifikaatio on seuraava.

Kun |z| < 1, voidaan kehittää geometrisen sarjan ja integroida termeittäin: f(z) =

$$\begin{aligned}
&= z \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t} \sum_{m=0}^\infty (-ze^{-t})^m = z \sum_{m=0}^\infty (-z)^m \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t(m+1)} \\
&= z \sum_{m=0}^\infty (-z)^m \frac{1}{(m+1)^n} \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t} = -\Gamma(n) \sum_{m=1}^\infty \frac{(-z)^m}{m^n} = -\Gamma(n) Li_n(-z).
\end{aligned}$$

saadaan siis erityis

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{n-1}}{e^t \frac{1}{z} + 1} = -\Gamma(n) Li_n(-z), \text{ missä on}$$

käytetty sarjaesitystä $Li_n(z) = \sum_{m=1}^\infty \frac{z^m}{m^n}$

polylogaritmin kertalukua n.