

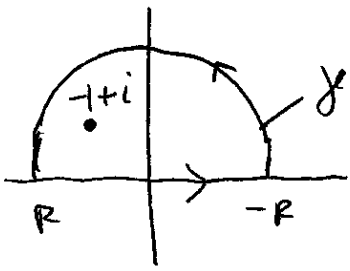
Integrabilit $\int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} f(x) dx$

Jordanin lemma $\int_{\gamma} e^{imz} f(z) dz \rightarrow 0$,
 $R \rightarrow \infty$

kun $m > 0$ ja $|f(z)| \rightarrow 0$
 $R \rightarrow \infty$.

ESIM. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2+2x+2} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) e^{i2x}}{x^2+2x+2} dx$

$= \text{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} \frac{(z+1) e^{i2z}}{z^2+2z+2} dz$



$z^2+2z+2=0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{4-8}) = \begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$

$= \text{Im} 2\pi i \frac{(z+1) e^{i2z}}{2z+2} \Big|_{z=-1+i}$

$= \text{Im} \pi i e^{-2i-2} = \pi e^{-2} \cos 2$

ESIM. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx$
 $a > 0$

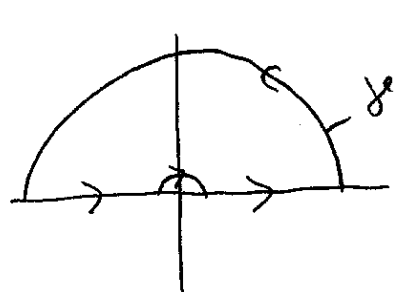
$z^2+a^2=0 \Rightarrow z = \pm ia$

$= \frac{1}{2} \text{Re} \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=ia} (2\pi i) = \frac{\pi}{2a} e^{-a}$

Pääarvo integraali

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx \right]$$

$f(0) \neq 0$



$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = \sum_{\text{Im} z_k > 0} 2\pi i \text{res}\left(\frac{f(z)}{z}, z_k\right)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \frac{1}{2} 2\pi i \text{res}\left(\frac{f(z)}{z}, 0\right) \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \pi i f(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \pi i f(0) + 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{res}\left(\frac{f(z)}{z}, z_k\right)$$

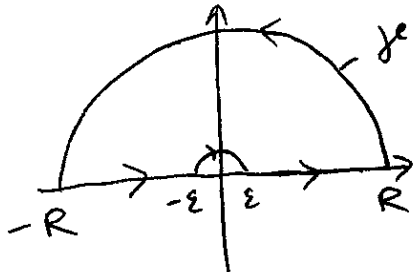
ESIM.
$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)} = \pi i \frac{1}{x^2+a^2} \Big|_{x=\xi} + 2\pi i \frac{1}{(z-\xi)2z} \Big|_{z=ia}$$

$a > 0, \xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &= \pi i \frac{1}{\xi^2+a^2} + \pi i \frac{1}{ia(ia-\xi)} = \pi i \frac{1}{\xi^2+a^2} \left[1 - \frac{i}{a}(-ia-\xi) \right] \\ &= -\frac{\xi \pi}{(\xi^2+a^2)a} \end{aligned}$$

ESIM.
$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \quad \alpha > 0 \text{ ja } \alpha < 0.$$

$\alpha > 0$



Apuintegraali

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = 0$$

Cauchyn lauseen nojalla.

Integraali isoa kaarta pitkin $\rightarrow 0$, kun $R \rightarrow \infty$.
Pientä kaarta pitkin rajalla $\epsilon \rightarrow 0$ jäljelle jää

$$-2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{res} \left(\frac{e^{i\alpha z}}{z}, 0 \right) = -2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot 1. \quad \text{Reaalitavalla}$$

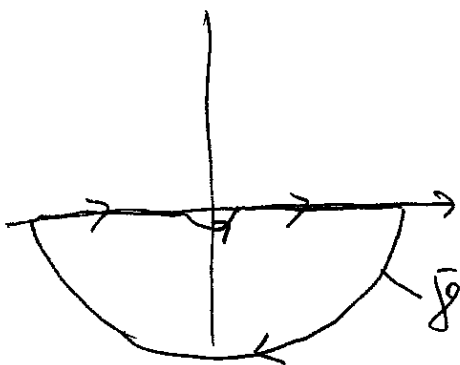
muuttamalla saadaan pääarvointegraali, siis

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \pi i = 0$$

$$\Rightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \pi i, \quad \alpha > 0.$$

$\alpha < 0$

Iso kaari pitää kääntää alas päin, jotta se nähdään rajalla $R \rightarrow \infty$, siis apukäyrä.



Kuuntan samalla tavalla

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \pi i = 0$$

Niinpä

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = -\pi i, \quad \alpha < 0.$$

Joskus pääarvointegraali on helpoin tapa laskea "oikeasti" suppena epäoleellinen integraali.

ESIM. Laske $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

Tässä $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im } P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi.$

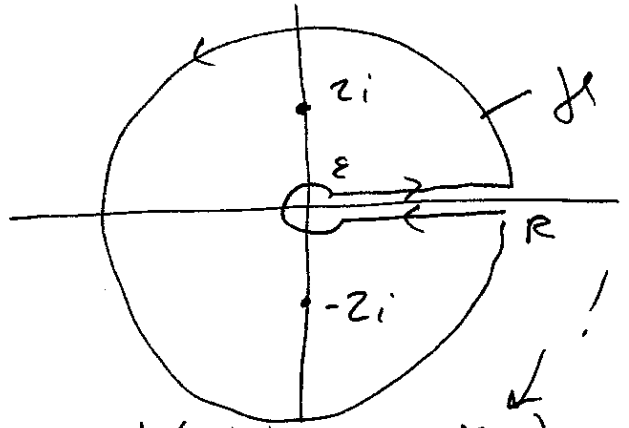
Monikäyttöisissä funktioita integroitaessa pitää huolehtia siitä, että kaavat valitaan niin, että funktio on jatkuva integrointikäyrällä. Tällöin Cauchyn lause ja sen seuraus, ml. residylause, ovat käyttökelpoisia.

ESIM $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{x}}$

Apuintegraali

$\oint \frac{dz}{(z^2+4)z^{1/3}}$

$= 2\pi i \left\{ \frac{e^{-\frac{1}{3}(\ln|z| + i\arg z)}}}{2z} \Big|_{z=2i} + \frac{e^{-\frac{1}{3}(\ln|z| + i\arg z + i2\pi)}}{2z} \Big|_{z=-2i} \right\}$



Nävan z = -2i kohdalla juuren haaran p. sellainen, että integrandi on jatkuva neg. reaaliosuudella.

$= 2\pi i \left\{ \frac{2^{-1/3} e^{-\frac{i\pi}{6}}}{4i} + \frac{2^{-1/3} e^{\frac{i\pi}{6} - \frac{2\pi i}{3}}}{-4i} \right\} = \frac{\pi}{2^{1/3}} (e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}).$

Toisaalta

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \oint \frac{dz}{(z^2+4)z^{1/3}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} + \int_{\infty}^0 \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

Sillä leikkauksen alareunalla

$$z^{-1/3} \Big|_{\arg z \rightarrow 0-} = e^{-1/3(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi))} \Big|_{\arg z \rightarrow 0-}$$

$$= x^{-1/3} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

Isaa kaarta pitkin integraali

vähenee, koska $|z \frac{1}{(z^2+4)z^{1/3}}| \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$.

Pienellä kaarella taas

$$\left| \int_{C_{\epsilon}(0)} \frac{dz}{(z^2+4)z^{1/3}} \right| \leq \frac{\epsilon^{-1/3}}{4-\epsilon^2} 2\pi\epsilon \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad \text{Niinpä}$$

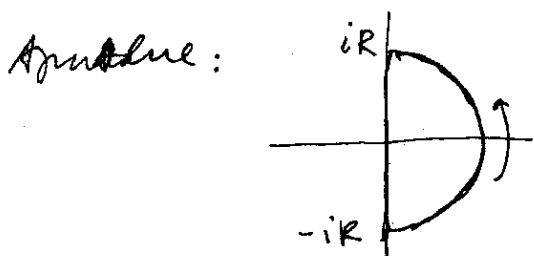
$$(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} = \frac{\pi}{2^{4/3}} (e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} = \frac{\pi}{2^{4/3}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}}$$

$$= \frac{\pi}{2^{4/3}} \frac{(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}) e^{\frac{\pi i}{3}}}{2i \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2^{4/3}} \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2^{4/3} \sqrt{3}}$$

Argumentin peruste ja Rouchen lause sopivat tähän.

Esim. Montako juurta polynomilla $P(z) = z^3 - 3z + 1$ on oikeassa puolitavossa ($\operatorname{Re} z > 0$).



$$P(z) = z^3 \left(1 - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right)$$

Ympyrän kaarta pitkin z^3 :n argumentti muuttuu

en 3π , kun taas toisen tekijän argumentti muuttuu on mielivaltaisen pieni, kun R on tarpeeksi iso. Imaginaari-akselilla tarkitsemme koko polynomi $z = iy$
 $P(iy) = 1 - i(y^3 + 3y)$ mistä $\arg P(iy) = -\arctan(y^3 + 3y)$
 Ylläällä tämä on $-\frac{\pi}{2}$ (iso $R!$), alhaalla $\frac{\pi}{2}$, eli muutos π , yhteensä $\Delta \arg P(z) = 4\pi$ ja juuria on alueella $\operatorname{Re} z > 0$ kaksi.

Esim. Entä kiekossa $|z| < 1$?

Itse esittää polynomi Rouchen lauseen funktioiden summan $z^3 - 3z + 1 = f + g$. Yksiköllisyypyrällä ($|z^3| = 1$)

$$\begin{aligned} | -3z + 1 | \Big|_{z=1} &= | 1 - 3\cos\phi - 3i\sin\phi | = \sqrt{(1 - 3\cos\phi)^2 + 9\sin^2\phi} \\ &= \sqrt{1 + 9 - 6\cos\phi} = \sqrt{10 - 6\cos\phi} \geq \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Näinpa

$$| -3z | \Big|_{z=1} > | z^3 | \Big|_{z=1} \quad \text{ja polynomilla } z^3 - 3z + 1$$

on yksiköllisyypyrällä yhtä monta juurta kuin polynomilla $1 - 3z$, ts. yksi juuri.

Meromorfinen funktion osamurtokehittäminen

(37)

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(z), \quad \text{kun} \quad |f(z)| \rightarrow \infty, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \neq z_k;$$

z_k - funktion f napa.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}(z-z_k)^n + \underbrace{\frac{a_{k,-1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,-2}}{(z-z_k)^2} + \dots + \frac{a_{k,-m_k}}{(z-z_k)^{m_k}}}_{= G_k(z)}.$$

ESIM. $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

$z_1 = i$: $G_1(z) = \frac{\text{res}(f, i)}{z-i} = \frac{1}{2(z-i)}$
(yksiin-kertainen napa)

$z_2 = -i$: $G_2(z) = \frac{\text{res}(f, -i)}{z+i} = \frac{1}{2(z+i)}$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Integraalin $\oint_{C_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ arviointi rajalla

$R \rightarrow \infty$ useimmiten hankelin osa tehtävää.

Jordanin lemmasta saattaa olla hyötyä, jos

suoraan ei näy, että $|f(z)| \rightarrow \infty$, kun $R = |z| \rightarrow \infty$.

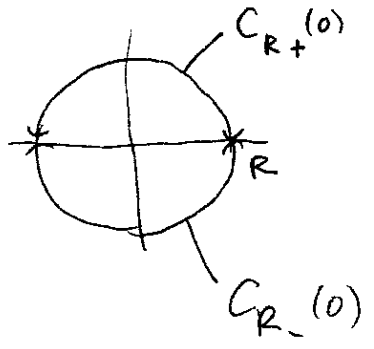
ESIM. Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$ napakehittelmä.

Risteissä $z = n\pi$ toisen kertaluvun navat. Laurentin sarjan alku Taylorin sarjan avulla:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 z} &= \frac{1}{\frac{1}{2}(1 - \cos 2z)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1 - \cos[2(z - n\pi) + 2n\pi])} \\ &= \frac{2}{1 - \cos 2(z - n\pi)} = \frac{2}{1 - [1 - \frac{1}{2} 4(z - n\pi)^2 + \frac{1}{24} 16(z - n\pi)^4 + \dots]} \\ &= \frac{2}{2(z - n\pi)^2 [1 - \frac{1}{3}(z - n\pi)^2 + \dots]} = \frac{1}{(z - n\pi)^2} \left(1 + \frac{1}{3}(z - n\pi)^2 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{(z - n\pi)^2} + \frac{1}{3} + O((z - n\pi)^2). \end{aligned}$$

Niinpä $\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$, jos jäännöstermi häviää. Reaalitaselilla $\frac{1}{\sin^2 x}$ ei vähene, kun $|x| \rightarrow \infty$. Jäännöstermi-integraali on tässä

$$\oint_{C_{R+}(0)} \frac{ds}{\sin^2 s (s - z)} = -4 \int_{C_{R+}(0)} \frac{e^{2is} ds}{(s - z)(1 - e^{is})^2} - 4 \int_{C_{R-}(0)} \frac{e^{-2is} ds}{(s - z)(1 - e^{-is})^2}$$



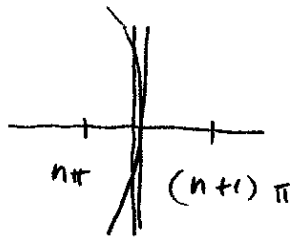
Jordanin lemmän nojalle riittää, että $\frac{1}{(1 - e^{is})^2}$ on rajoitettu yleensä missä puolitasossa.

Olkoon $z = x + iy$, silloin

$$\left| \frac{1}{(1 - e^{iz})^2} \right| = \frac{1}{|1 - e^{-y} \cos x + i e^{-y} \sin x|^2}$$

$$= \frac{1}{1 - 2 \cos x e^{-y} + e^{-2y}}$$

Tässä $y \rightarrow 0$ on hieman ongelmallinen. Suoristetaan reaaliosaksi lähelle $C_{R^+}(0)$ s.e. välillä $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



Suoristetaan y -osuksi puintainen suor. Se leikkaa x -osuksi pisteessä

$$x_n^2 + \frac{\pi^2}{4} = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 = (n^2 + n) \pi^2 + \frac{\pi^2}{4}$$

S.o. $x_n = \pm \pi \sqrt{n^2 + n}$. Tällä janelalla

$$\frac{1}{1 - 2 \cos x e^{-y} + e^{-2y}} \Big|_{x = \pi \sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{1 - 2 \cos \pi \sqrt{n^2 + n} e^{-y} + e^{-2y}}$$

$$= \frac{1}{1 - 2 \cos \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) - \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \pi \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right] e^{-y} + e^{-2y}}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-2y} - 2 \sin \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) - \pi \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right] (-1)^{n+1} e^{-y}}$$

$(-1)^{n+1} = -1$ ei ole ongelma, ellei $(-1)^{n+1} = +1$

$$\rightarrow \frac{1}{1 + e^{-2y} - 2 \sin[\] e^{-y}} < \frac{1}{1 + e^{-2y} - e^{-y}}$$

↑
pieni

kun n on tarpeeksi pieni.

$F = \frac{f'}{f}$ on meromorfinen, kun f on kokonainen.

Funktion F napakehitelmä ei integroimalla saadaan funktion $\ln f$ napakehitelmä, mistä heti seuraa funktion $f = e^{\ln f}$ tulokehitelmä.

ESIM. $f = \sinh z$, tulokehitelmä?

$$\frac{f'}{f} = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \text{ yksinkertaiset nollat pisteissä}$$

$z = in\pi$, niinpä laskeaan $\operatorname{res}(\cosh z, in\pi) = 1$ ja saadaan

$$\cosh z - \frac{1}{z} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z - in\pi}$$

Tätä sarjaa tarkasteltaessa napakehitelmän summausääntö on tarpeen. Jäännös termien integrointiympyrän laejetessa kompleksikonjugaatit nollat tulevat mukaan pareittain. Aäntö on siis

$$\cosh z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - in\pi} + \frac{1}{z + in\pi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}$$

Integroidaan

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^z \frac{1}{\sinh z} dz &= \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z dz}{z^2 + n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \frac{1}{z^2 + n^2\pi^2} dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{z^2 + n^2\pi^2}{n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Summa tässä suppenee esim. integraalitestin perusteella tasaisesti missä tahansa kielossa $|z| < R$ (sarjasta päätetään löytyä pois termit, joissa $n\pi < R$). Näinpä voidaan kirjoittaa

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

