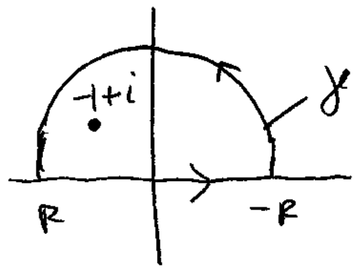
Integraalit $\int_{-\infty} \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} f(x)\,dx$

Jordanin lemma $\int_{\frown} e^{imz} f(z)\,dz \underset{R\to\infty}{\to} 0$,

kun $m>0$ ja $|f(z)| \underset{R\to\infty}{\to} 0$.

ESIM. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\,e^{i2x}}{x^2+2x+2}\,dx$

$= \operatorname{Im} \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma} \frac{(z+1)e^{i2z}}{z^2+2z+2}\,dz$



$z^2+2z+2=0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{4-8}\right) = \begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$

$= \operatorname{Im} \cancel{2}\pi i \left. \frac{\cancel{(z+1)}\,e^{i2z}}{\cancel{2}\cancel{(z+1)}} \right|_{z=-1+i}$

$= \operatorname{Im} \pi i\, e^{-2i-2} = \pi e^{-2} \cos 2$.

ESIM. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$

$a>0$

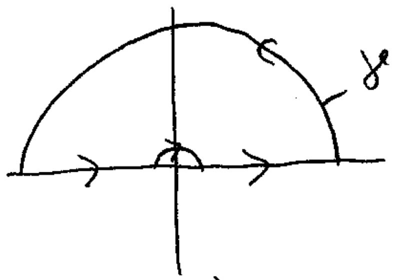
$z^2+a^2=0 \Rightarrow z = \pm ia$.

$= \frac{1}{2}\operatorname{Re} \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=ia} (2\pi i) = \frac{\pi}{2a} e^{-a}$.

Pääarvo integraali

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx\right]$$

$f(0) \neq 0$



$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\,dz = \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{f}{z}, z_k\right)$$

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} \xrightarrow[R\to\infty]{} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - \frac{1}{2}2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{f(z)}{z}, 0\right)$$

$$= P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - \pi i f(0)$$

$$\Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx = \pi i f(0) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}\left(\frac{f(z)}{z}, z_k\right)$$

ESIM. $$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)} = \pi i \left.\frac{1}{x^2+a^2}\right|_{x=\xi} + 2\pi i \left.\frac{1}{(z-\xi)2z}\right|_{z=ia}$$

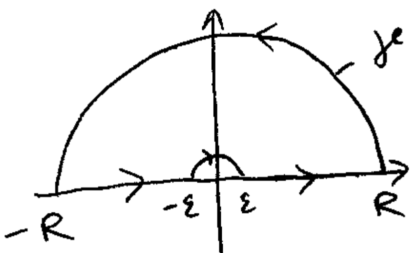
$a>0, \quad \xi \in \mathbb{R}$

$$= \pi i \frac{1}{\xi^2+a^2} + \pi i \frac{1}{ia(ia-\xi)} = \pi i \frac{1}{\xi^2+a^2}\left[1 - \frac{i}{a}(-ia-\xi)\right]$$

$$= -\frac{\xi\pi}{(\xi^2+a^2)a}.$$

ESIM. $P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx$, $\alpha > 0$ ja $\alpha < 0$.

$\alpha > 0$



Apuintegraali

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz = 0$$

Cauchyn lauseen nojalla.

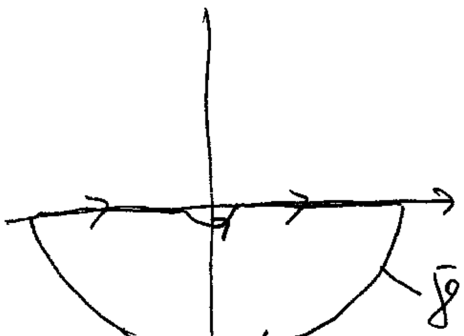
Integraali isoa kaarta pitkin $\to 0$, kun $R \to \infty$. Pientä kaarta pitkin rajalla $\varepsilon \to 0$ jäljelle jää

$-2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{z}, 0\right) = -2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$. Reaaliakselin puolikkailta saadaan pääarvointegraali, siis

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz = P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx - \pi i = 0$$

$$\Rightarrow \quad P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx = \pi i, \quad \alpha > 0.$$

$\alpha < 0$ Iso kaari pitää kääntää alaspäin, jotta se häviää rajalla $R \to \infty$, siis apukäyrä.



Muuten samalla tavalla! ! kierto-suunta!

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \oint_{\bar\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz = P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx + \pi i = 0$$

Niinpä

$$P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx = -\pi i, \quad \alpha < 0.$$

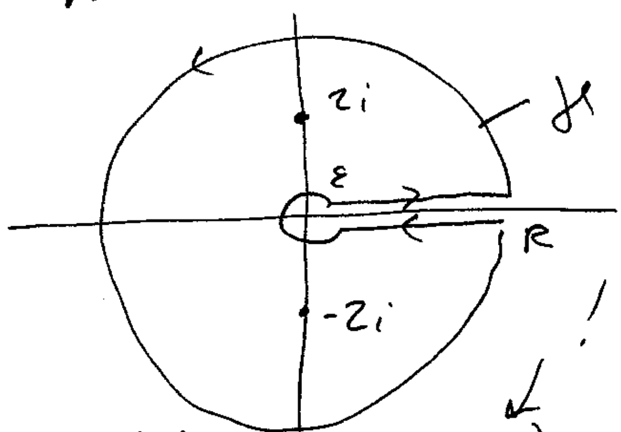
Joskus pääarvointegraali on helpoin tapa laskea "oikeasti" suppeneva epäoleellinen integraali.

ESIM. Laske $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Tässä $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{Im} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi$.

Monikäsitteisiä funktioita integroitaessa pitää huolehtia siitä, että haarat valitaan niin, että funktio on jatkuva integrointikäyrällä. Silloin Cauchyn lause ja sen seuraukset, mm. residylause, ovat käyttökelpoisia.

ESIM $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$



Apuintegraali

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)\,z^{1/3}}$$

$$= 2\pi i\left\{ \frac{e^{-\frac{1}{3}(\ln|z| + i\arg z)}}{2z}\Bigg|_{z=2i} + \frac{e^{-\frac{1}{3}(\ln|z| + i\arg z + i2\pi)}}{2z}\Bigg|_{z=-2i} \right\}$$

Navan $z=-2i$ kohdalla juuren haaran pa. sellainen, että integrandi on jatkuva neg. reaaliakselilla.

$$= 2\pi i\left\{ \frac{2^{-1/3}e^{-\frac{i\pi}{6}}}{4i} + \frac{2^{-1/3}e^{\frac{i\pi}{6}-\frac{2\pi i}{3}}}{-4i} \right\} = \frac{\pi}{2^{4/3}}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}\right).$$

Toisaalta

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)z^{1/3}} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} + \int_\infty^0 \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

sillä leikkauksen alareunalla

$$z^{-1/3}\Big|_{\arg z\to 0-} = e^{-1/3(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi))}\Big|_{\arg z \to 0-}$$

$= x^{-1/3} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Isoa kaarta pitkin integraali häviää, koska $\left| z \frac{1}{(z^2+4)z^{1/3}} \right| \to 0$, $|z|\to\infty$.

Pienellä kaarella taas

$$\left| \int_{C_\varepsilon(0)} \frac{dz}{(z^2+4)z^{1/3}} \right| \leq \frac{\varepsilon^{-1/3}}{4-\varepsilon^2} 2\pi\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon\to 0.$$

Niinpä

$$\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} = \frac{\pi}{2^{4/3}} \left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)x^{1/3}} = \frac{\pi}{2^{4/3}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}}$$

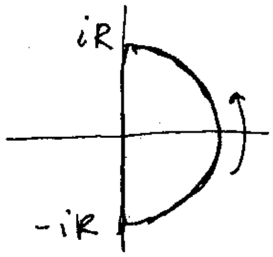
$$= \frac{\pi}{2^{4/3}} \frac{\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}\right) e^{\frac{\pi i}{3}}}{2i \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2^{4/3}} \frac{\sin \pi/6}{\sin \pi/3} = \frac{\pi}{2^{4/3}\sqrt{3}}.$$

Juurten lukumäärä alueessa

Argumentin periaate ja Rouchén lause sopivat tähän.

Esim. Montako juurta polynomilla $P(z)=z^3-3z+1$ on oikeassa puolitasossa ($\operatorname{Re} z > 0$).

Apualue:



$$P(z) = z^3\left(1 - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right)$$

Ympyränkaarta pitkin z^3:n argumentin muutos on 3π, kun taas toisen tekijän argumentin muutos on mielivaltaisen pieni, kun R on tarpeeksi iso. Imaginaariakselilla tarvitaan koko polynomi $z=iy$
$P(iy) = 1 - i(y^3+3y)$ mistä $\arg P(iy) = -\arctan(y^3+3y)$
Ylhäällä tämä on $-\frac{\pi}{2}$ (iso R!), alhaalla $\frac{\pi}{2}$, eli muutos π, yhteensä $\Delta \arg P(z) = 4\pi$ ja juuria on alueella $\operatorname{Re} z > 0$ kaksi.

Esim. Entä kiekossa $|z| < 1$?
Yritä esittää polynomi Rouchén lauseen funktioiden summana $z^3-3z+1 = f+g$. Yksikköympyrällä $|z^3|=1$.

$$|-3z+1|\Big|_{z=1} = |1-3\cos\phi-3i\sin\phi| = \sqrt{(1-3\cos\phi)^2+9\sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{1+9-6\cos\phi} = \sqrt{10-6\cos\phi} \geq \sqrt{4} = 2.$$ Niinpä

$$|1-3z|\Big|_{z=1} > |z^3|\Big|_{z=1}$$ ja polynomilla z^3-3z+1 on yksikköympyrässä yhtä monta juurta kuin polynomilla $1-3z$, ts. yksi juuri.

Meromorfisen funktion osamurtokehitelmä

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(z), \quad \text{kun} \quad |f(z)| \to \; |z| \to \infty, \; z \neq z_k;$$

z_k – funktion f napa.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}(z-z_k)^n + \underbrace{\frac{a_{k,-1}}{z-z_k} + \frac{a_{k,-2}}{(z-z_k)^2} + \dots + \frac{a_{k,-m_k}}{(z-z_k)^{m_k}}}_{= G_k(z)}.$$

ESIM. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

$z_1 = i$: $G_1(z) = \dfrac{\mathrm{res}(f, i)}{z-i} = \dfrac{1}{2(z-i)}$,

(yksinkertainen napa)

$z_2 = -i$: $G_2(z) = \dfrac{\mathrm{res}(f,-i)}{z+i} = \dfrac{1}{2(z+i)}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Integraalin $\displaystyle\oint_{C_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ arviointi rajalla

$R \to \infty$ useimmiten hankalin osa tehtävää.
Jordanin lemmasta saattaa olla hyötyä, jos suoraan ei näy, että $|f(z)| \to \infty$, kun $R = |z| \to \infty$.

ESIM. Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$ napakehitelmä.

Pisteissä $z = n\pi$ toisen kertaluvun navat. Laurentin sarjan alku Taylorin sarjan avulla:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos 2z)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos[2(z-n\pi)+2n\pi])}$$

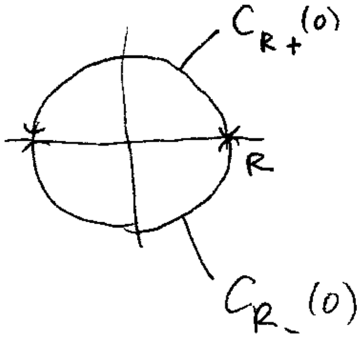
$$= \frac{2}{1-\cos 2(z-n\pi)} = \frac{2}{1-[1-\frac{1}{2}4(z-n\pi)^2+\frac{1}{24}16(z-n\pi)^4+\ldots]}$$

$$= \frac{2}{2(z-n\pi)^2[1-\frac{1}{3}(z-n\pi)^2+\ldots]} = \frac{1}{(z-n\pi)^2}\left(1+\frac{1}{3}(z-n\pi)^2+\ldots\right.$$

$$= \frac{1}{(z-n\pi)^2} + \frac{1}{3} + O\left((z-n\pi)^2\right).$$

Niinpä $\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$, jos jäännöstermi häviää. Reaaliakselilla $\frac{1}{\sin^2 x}$ ei vähene, kun $|x| \to \infty$. Jäännöstermi-integraali on tässä

$$\oint_{C_R(0)} \frac{d\zeta}{\sin^2\zeta\,(\zeta-z)} = -4\int_{C_{R+}(0)} \frac{e^{2i\zeta}\,d\zeta}{(\zeta-z)(1-e^{i\zeta})^2} - 4\int_{C_{R-}(0)} \frac{e^{-2i\zeta}\,d\zeta}{(\zeta-z)(1-e^{-i\zeta})^2}$$



Jordanin lemman nojalla riittää, että

$$\frac{1}{(1-e^{i\zeta})^2}$$

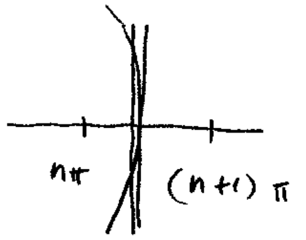
on rajoitettu ylemmässä puolitasossa.

Olkoon $\zeta = x + iy$, silloin

$$\left|\frac{1}{(1-e^{i\zeta})^2}\right| = \frac{1}{|1 - e^{-y}\cos x + i e^{-y}\sin x|^2}$$

$$= \frac{1}{1 - 2\cos x\, e^{-y} + e^{-2y}}.$$

Tässä $y \to 0$ on hieman ongelmallinen. Suoristetaan reaaliakselin lähellä $C_{R_+}(0)$ s.e. välillä $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



Saadaan y-akselin suuntainen suora. Se leikkaa x-akselin pisteessä

$$x_n^2 + \frac{\pi^2}{4} = (n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2 = (n^2+n)\pi^2 + \frac{\pi^2}{4}$$

so. $x_n = \pm \pi\sqrt{n^2+n}$. Tällä janalla

$$\left.\frac{1}{1-2\cos x\, e^{-y}+e^{-2y}}\right|_{x=\pi\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{1-2\cos\pi\sqrt{n^2+n}\, e^{-y} + e^{-2y}}$$

$$= \frac{1}{1 - 2\cos\left[\pi(n+\frac{1}{2}) - \pi(n+\frac{1}{2}) + \pi\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right]e^{-y} + e^{-2y}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-2y} - 2\sin\left[\pi(n+\frac{1}{2}) - \pi\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right](-1)^{n+1}e^{-y}}$$

$(-1)^{n+1} = -1$ ei ole ongelma, olkoon $(-1)^{n+1} = +1$

$$\to \frac{1}{1+e^{-2y} - 2\underbrace{\sin[\;]}_{\text{pieni}}e^{-y}} < \frac{1}{1+e^{-2y}-e^{-y}}$$, kun n on tarpeeksi suuri.

Kokonaisen funktion tulokehitelmä

$F = \frac{f'}{f}$ on meromorfinen, kun f on kokonainen. Funktion F napakehitelmää integroimalla saadaan funktion $\ln f$ napakehitelmä, mistä heti seuraa funktion $f = e^{\ln f}$ tulokehitelmä.

ESIM. $f = \sinh z$, tulokehitelmä?

$\frac{f'}{f} = \frac{\cosh z}{\sinh z}$, yksinkertaiset navat pisteissä $z = in\pi$, niinpä lasketaan $\mathrm{res}(\coth z, in\pi) = 1$ ja saadaan

$$\coth z - \frac{1}{z} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z - in\pi}$$

Tätä sarjaa tarkasteltaessa napakehitelmän summaussääntö on tarpeen. Jäännöstermin integrointipolun laajetessa kompleksikonjugaatit navat tulevat mukaan pareittain. Sääntö on siis

$$\coth z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - in\pi} + \frac{1}{z + in\pi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}.$$

Integroidaan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big/_{\varepsilon}^{z} \ln \frac{\sinh z}{z} = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\zeta \, d\zeta}{\zeta^2 + n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big/_0^z \ln(\zeta^2 + n^2\pi^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{z^2 + n^2\pi^2}{n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Summa tässä suppenee esim. integraalitestin perusteella tasaisesti missä tahansa kiekossa $|z| < R$ (sarjasta jätetään tietysti pois termit, joissa $n\pi < R$). Niinpä voidaan kirjoittaa

$$\sinh z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$