Leibnizin testi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $u_n > 0$.

Suppenee, joss $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq$ ja $u_n \to 0$
(s.o. $u_n \searrow 0$)

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ suppenee, myöhemmin nähdään, että

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. Sarja ei suppene

itseisesti, sillä $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

ESIM. Millä parametrin θ arvoille suppenee trigonometrinen sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{\ln n} \quad ?$$

Dirichlet: $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$. Tässä

$\left| \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} \right| \leq \frac{1}{2|\sin\theta|}$ on rajoitettu $\forall\, \theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Jono $\frac{1}{\ln n}$ menee monotonisesti nollaan,

siis sarja suppenee.

ESIM. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1)\theta}{\sqrt{n}}$ tasainen suppeneminen?

Tässä $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sin(2k-1)\theta = (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$ on

rajoitettu, kun $\theta \neq (n+\frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ menee tasaisesti

nollaan $\Rightarrow$ tasaisesti suppenee, kun $\delta + (n+\frac{1}{2})\pi \leq \theta \leq (n+\frac{3}{2})\pi - \delta$,

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\delta > 0$.

Taylorin sarja

Analyyttisellä funktiolla on jokaisessa suppenemisalueen pisteessä Taylorin sarja, jonka suppenemissäde $R > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n.$$

Muutama perussarja pitää osata ulkoa:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z|<1.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \forall z.$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \forall z.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \forall z.$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \qquad |z|<1.$$

Muiden funktioiden sarjoja valeinnettaessa derivointi tai Cauchyn integraalikaava usein hankalia. Osamurtoihin jako ja integrointi ovat tavallisesti hyödyllisempiä.

ESIM. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ Maclaurinin sarja?

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{1}{3}\frac{1}{(-2)}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] z^n .$$

Suppenemisalue on pienempi kiekoista $|z|<1$, $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

T.e. $|z|<1$.

ESIM $f(z) = \sin(z^2+2z)$. Taylorin sarja pisteessä $z_0 = -1$.

$$\sin(z^2+2z) = \sin\left[(z+1)^2 - 1\right] = \sin(z+1)^2 \cos 1 - \cos(z+1)^2 \sin 1$$

$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^{4n+2}}{(2n+1)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^{4n}}{(2n)!}$$

Sin ja cos sarjojen suppenemisalue on $\mathbb{C}$, t.s. $(z+1)^2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z \in \mathbb{C}$ on funktion $f(z)$ Taylorin sarjan suppenemisalue.

ESIM. Määritä funktion artanh z Maclaurinin sarja.

Tämä funktio voidaan esittää logaritmin avulla ja kehittää sitä tietä. Toinen mahdollisuus on integroida derivaatan sarjaa

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{artanh}\,z = \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

mistä saadaan

$$\mathrm{artanh}\,z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{2n}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

ESIM. Määritä funktion $\ln\frac{1+z}{1-z}$ Maclaurinin sarja.

Yhdistellään tunnettuja log. sarjoja:

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n z^n}{n}$$

!

Tässä ~~valitaan~~ implisiittisesti funktion $\ln\frac{1+z}{1-z}$ se haara, jonka funktioiden $\ln(1+z)$ ja $\ln(1-z)$ päähaarat kiinnittävät.

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\underbrace{\left[(-1)^n - 1\right]}_{=0\text{, kun } n=2m} = (-1)(-2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Laurentin sarja

Sisältää myös negatiivisia potensseja:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{pääosa}} + \underbrace{\sum_{n=0} a_n (z-z_0)^n}_{\text{säännöllinen osa}}$$

ESIM. Määritä Laurentin sarjan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$ suppenemisalue.

Säännöllinen osa: $\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n+1}\right)^{1/n}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln(3^n+1)} = e^{-\ln 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{R_1 = 3}.$$

Pääosa:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1}\left(\frac{1}{z}\right)^n \Rightarrow R_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^{-n}+1}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln(1+1/3^n)} = 1.$$

Suppenemisalue on rengas $1 < |z| < 3$.

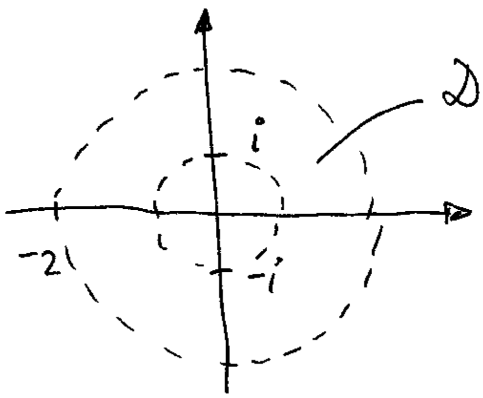
ESIM. Sarjan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$ suppenemisalue?

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty}\left(2^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0 \Rightarrow R_1 = \infty.$$

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left(2^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Suppenemisalue on reiitetty taso $0 < |z+1| < \infty$.

ESIM. Kehitä Laurentin sarjaksi renkaassa $1 < |z| < 2$ funktio $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$.



Jaetaan osamurtoihin. Tätä ei välttämättä kannata viedä ihan loppuun asti. Tässä termin $\dfrac{1}{z+2}$ kerroin saadaan panemalla muualla $z=-2$, loput lasketaan:

$$\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{z+2} + \frac{Az+B}{z^2+1}$$

$$= \frac{-\frac{2}{5}z^2 - \frac{2}{5} + Az^2 + (B+2A)z + 2B}{(z^2+1)(z+2)}.$$ Tästä heti $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$.

Siispä

$$\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{z+2} + \frac{1}{5}(2z+1)\frac{1}{z^2+1}$$

Ensimmäisessä termissä geom. sarjan suppenemisen rajaympyrä on $|z|=2$, sarja pitää saada suppenemaan, kun $|z|<2$; kehitetään siis $\frac{z}{2}$:n suhteen. Toisessa rajaympyrä on $|z|=1$. Suppeneva sarja alueella $|z|>1$ syntyy, kun kehitetään $\frac{1}{z^2}$:n suhteen. Siispä

$$\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\,\frac{2z+1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}} + \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}}.$$

Äärettömän kaukainen piste $z = \infty$ saadaan, kun $w = \frac{1}{z} \to 0$.

ESIM. Määritä funktion $\frac{1}{2} \ln \frac{z+a}{z-a} = f(z)$ Laurentin sarja pisteessä $z = \infty$.

Tämä on siis L-sarja muuttujan $w = \frac{1}{z}$ origossa:

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{w} + a}{\frac{1}{w} - a} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + aw}{1 - aw}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(1 + aw) - \ln(1 - aw) \right]$$

tästä pääarvojen sarjat

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (aw)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n (aw)^n}{n} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aw)^n}{n} \left[(-1)^n - 1 \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aw)^{2n+1}}{2n+1}, \quad |aw| < 1.$$

Mimpä

$$\frac{1}{2} \ln \frac{z+a}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{z} \right)^{2n+1} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{-2n+1} \left(\frac{a}{z} \right)^{-2n+1}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z}{a} \right)^{2n+1} \ldots$$

Vaihtoehtoisesti voi integroida derivaatan:

$$\frac{d}{dw} \frac{1}{2} \ln \frac{1+aw}{1-aw} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{1+aw} + \frac{1}{1-aw} \right) = \frac{a}{1 - a^2 w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} w^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{1+aw}{1-aw} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \int_0^w u^{2n} \, du = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \frac{w^{2n+1}}{2n+1}.$$

ERISTETYT ERIKOISPISTEET

$$f \in \mathcal{H}(D_\varepsilon(z_0) \setminus z_0) \Rightarrow \exists\ f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

1) $m = 0$ poistuva erikoispiste,
2) $0 < m < \infty$ napa,
3) $m = \infty$ oleellinen erikoispiste.

ESIM: $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = \dfrac{1}{\cancel{z}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} z^{2n+\cancel{1}}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n+1)!}$

$z = 0$ on poistuva erikoispiste, kun lisämääritellään

$\left.\dfrac{\sin z}{z}\right|_{z=0} = 1$, niin $\dfrac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eli kokonainen funktio

ESIM: $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Yksinkertaiset navat pisteissä $z = n\pi$, sillä

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin[(z-n\pi)+n\pi]} = \frac{1}{\sin(z-n\pi)\cos n\pi}$$

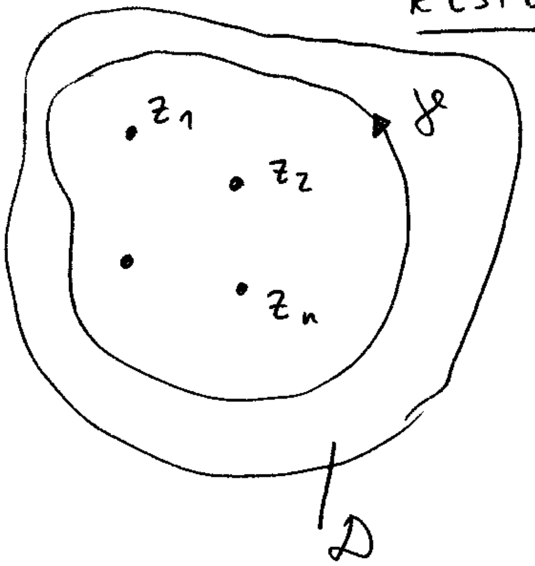
$$= \frac{(-1)^n}{(z-n\pi) - \frac{1}{6}(z-n\pi)^3 + \dots} = \frac{(-1)^n}{(z-n\pi)} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{6}(z-n\pi)^2 + \dots\right)}_{\text{säännöllinen funktio}}$$

residy

$$= \frac{(-1)^n}{(z-n\pi)} + \frac{(-1)^n (z-n\pi)}{6} + \dots$$

ESIM: $e^{\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}$ $z = 0$ on oleellinen erikoispiste.

RESIDYLAUSE



$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k)$$

kun $f \in \mathcal{H}\left(D \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} z_k\right)\right)$

(reiät eristettyjen erikoispisteiden kohdalle).

Miten laskea residy?

1) $\operatorname{res}(f, z_0) = \oint_{C_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz$

2) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow \operatorname{res}(f, z_0) = a_{-1}$.

3) $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{\phi(z)}$, $\psi(z_0) \neq 0$, $\phi'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{res}(f, z_0) = \dfrac{\psi(z_0)}{\phi'(z_0)}$.

ESIM. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} \Rightarrow \operatorname{res}(f, n\pi) = \dfrac{1}{\cos z}\Big|_{z=n\pi} = (-1)^n$.

4) z_0 – napa kertalukua m:

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)\Big|_{z=z_0}.$$

ESIM $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, $\operatorname{res}(f, 1) = \dfrac{d}{dz} z\Big|_{z=1} = 1$.

Integraalit $\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$.

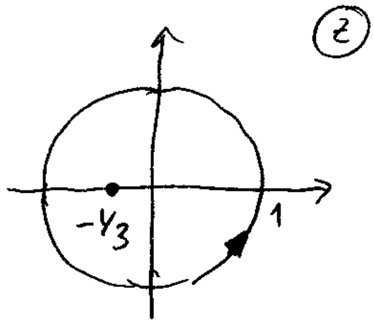
$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \to \oint_{C_1(0)} \frac{dz}{iz}, \quad \text{sillä} \quad z = e^{i\varphi} \Rightarrow dz = ie^{i\varphi} d\varphi.$$

ESIM

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi} = \frac{1}{i} \oint_{C_1(0)} \frac{dz}{z\left(5 + \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_{C_1(0)} \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3}$$

$$3z^2 + 10z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{6}\left[-10 \pm \sqrt{100 - 36}\right] = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}.$$



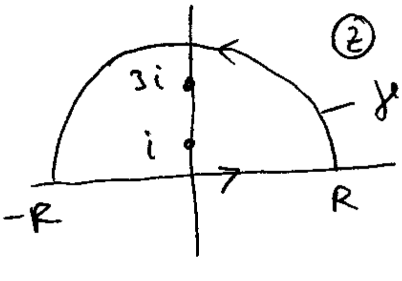
$$= \frac{2}{i}\, 2\pi i \left. \frac{1}{6z + 10} \right|_{z = -\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{2}.$$

Integraalit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Kaari-integraalin häviämisehto: $|z f(z)| \to 0$, $|z| \to \infty$.

ESIM.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \lim_{R \to \infty} \oint_{\gamma} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz$$



$$= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right|_{z = i} + \left. \frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right|_{z = 3i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1 - i + 2}{-4i + 20i} + \frac{-9 - 3i + 2}{-108i + 60i} \right) = \frac{5\pi}{12}.$$

juuret $z = (\pm i, \pm 3i)$