FYMM Ia Laskuharjoitus 2 syksy 2009

Palautetaan viimeistään ma 21.9. klo 12.00

1. Osoita alkeisfuktioiden määritelmiä käyttäen että

   a) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$, b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, c) $\tan iz = i \tanh z$.

2. Osoita, että

$$\operatorname{arcosh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) .$$

3. Tutki ja perustele, mitkä seuraavista funktioista ovat analyyttisiä (ts. niillä on jatkuva kompleksiderivaatta jossakin kompleksitason alueessa)?

   a) $f(z) = z \arg z$, b) $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$, c) $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

4. Käyttäen hyväksi kompleksiderivaatan ominaisuuksia sekä potenssifunktion z^n ja eksponenttifunktion e^z derivaattoja määritä seuraavien funktioiden analyyttisyysalueet ja laske derivaatat:

   a) $\tan z$, b) $z^2 e^{-z}$, c) $\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

5. Etsi holomorfisen funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ imaginaariosa $v(x, y)$, kun

$$u(x, y) = 2e^x \cos y + 2xy + 3 ,$$

   ja kirjoita löytämäsi holomorfinen funktio muuttujan z funktiona.