

1. Tarkastellaan pallosymmetristä  $M$ -massaista tähteä, jota kuvaa Schwarzschildin metriikka. Perjantaina teekkari on levossa etäisyydellä  $1.05r_s$  tähdestä, missä  $r_s$  on Schwarzschildin säde. Teekkarin ominaisvärähtelystä johtuen hän säteilee pääosin näkyvää valoa ( $\lambda \sim 5500 \text{ \AA}$ ). Maanantaiaamuna teekkari löytää itsensä etäisyydeltä  $20 r_s$ . Miten paljon kaukaisen havaitsijan mielestä teekkarin säteilemä valo punasiirtyy? Kuten tavallista, teekkarin voi olettaa massattomaksi.
2. Massaton teekkari on putoamassa mustaan aukkoon. Hän lähettää hätäviestin aina etäisyydellä  $r = r_s(1 + 1/n)$ , missä  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Milloin viestit saapuvat turvallisella etäisyydellä  $r = 4r_s$  tapahtumia seuraavalle teoreettiselle fyysikolle?
3. Tarkastellaan  $M$ -massaista pallosymmetristä mustaa aukkoa. Rajun viikonlopun jälkeen TKK:n opiskelija löytää itsensä etäisyydeltä  $GM/c^2$  mustan aukon keskustasta. Kuinka kauan kuluu aikaa ennenkuin haalarit repeytyvät lopullisesti ja opiskelija putoaa singulariteettiin? Voit olettaa teekkarin massattomaksi.
4. Fotoni putoaa Schwarzschildin metriikassa ja ylittää Schwarzschildin säteen  $r_s$  (fotoni on siis matkalla mustaan aukkoon). Oletetaan että fotoni on hetkellä  $t_1$  etäisyydellä  $r_s + r_0$  ( $r_0 \ll r_s$ ). Osoita, että Schwarzschildin säteen (mustan aukon tapahtumahorisontin) ylittämiseen ei liity mitään erikoista, vaan että fotoni löytää itsensä etäisyydeltä  $r_s - r_0$  ajassa  $\Delta t = \frac{2r_0}{c}$ .