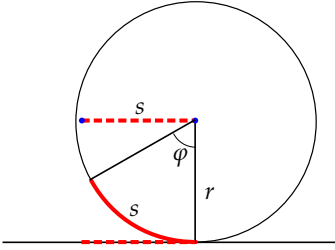


## Vieriminen

Yleisessä tapauksessa kappaleen massakeskipisteen liike ja sisäinen pyörimisliike ovat toisistaan riippumattomia. Nämä kuitenkin kytkeytyvät, kun kappale on vierimisliikkeessä.



$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{s}{r} \Rightarrow \\ \omega &= \frac{v}{r} \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{a}{r}\end{aligned}$$

## Vieriminen

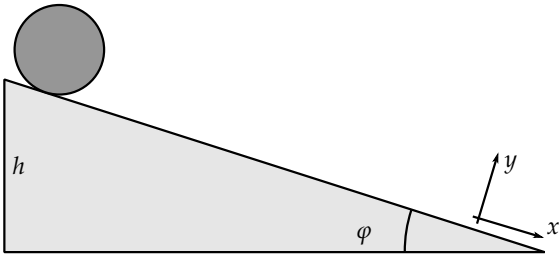
Vierivän kappaleen kineettinen energia

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2 \\ &= \frac{1}{2}m_{\text{eff}}v^2\end{aligned}$$

## Vierivä kappale kaltevalla tasolla

Kiinnitetään  $xy$ -koordinaatiston origo tason alareunaan. Kun kappaleen MKP on korkeudella  $h$ , on mekaaninen energia

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh \\ &= \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2 + mgh\end{aligned}$$



## eräiden kappaleiden hitausmomentit

KAPPALE	HITAUSMOMENTTI I
homogeeninen sylinteri	$\frac{1}{2}mr^2$
ohutseinäinen sylinteri	$mr^2$
homogeeninen pallo	$\frac{2}{5}mr^2$
ohutseinäinen pallo	$\frac{2}{3}mr^2$

## Vierivä kappale kaltevalla tasolla

Kuvan koordinaatistossa  $h = -x \sin \varphi$ . Mekaaninen energia säilyy, siis

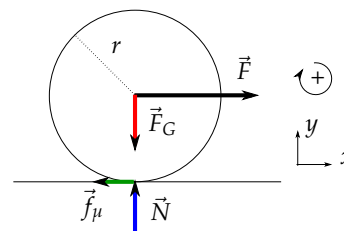
$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = 0 &= m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v\frac{dv}{dt} - mg\frac{dx}{dt}\sin\varphi \\ \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} &= \frac{g\sin\varphi}{1 + \frac{I}{mr^2}}\end{aligned}$$

Kiihtyvyys on tasaista ja riippuu kappaleen hitausmomentista, ts. massajakaumasta akselin ympäri.

Miksei kitkaa esiinny energiperiaatteessa? Jos taso on kitkaton kappale lähtee liukumaan ilman pyörimistä?!

## Vieriminen

Kappaletta työnnetään alustaa pitkin pyörimisaksen kohdalta.



Liikkeyhtälöt MPK:n suhteen:

$$\begin{aligned}ma_x &= F - f_\mu \\ ma_y &= N - F_G \\ I\alpha &= rf_\mu\end{aligned}$$

## Vieriminen

Kappale lähtee pyörimään keskipisteensä ympäri kitkan aiheuttaman momentin vaikutuksesta. Jos kappale vierii (eikä luista) seuraa vierimisehdosta

$$\Delta\varphi = \frac{s}{r} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{a_x}{r}$$

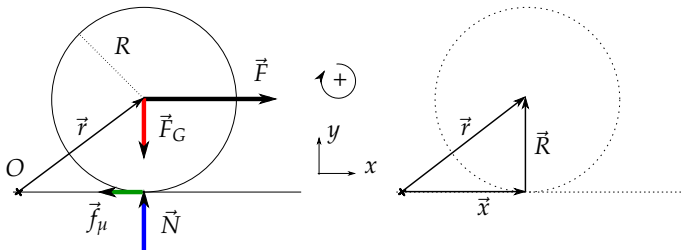
Liikkeyhtälöistä seuraa

$$a_x = \frac{F}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}$$

$$f_\mu = F \frac{I}{mr^2 + I}$$

## Vieriminen, taas...

Entä jos liikemäärämomentti  $\vec{L}$  ja momentti  $\vec{\tau}$  määritetäänkin ulkoisen pisteen suhteen?



## Vieriminen

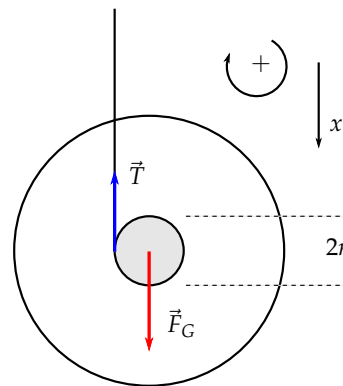
Niin pitkään, kuin kappale vierii on kitkavoima lepokitkaa. Tällä on yläraja, joka näin ollen määrää myös kulmakiihtyvyyden suurimman arvon. Vedettäessä liian suurella voimalla kappale luistaa.

Huomaa, ettei kitkavoima tee työtä, sillä pinnat eivät liu'u toistensa suhteen.

Kitkavoima vierimisliikkeessä toimii rajoittavana voimana, joka (tietyissä rajoissa) varmistaa vain vierimisehdon. Vertaa tilannetta pinnan tukivoimaan, jonka suuruus määräytyy yleensä siitä, ettei kappale painu tason sisään.

## Jojo

Miksi jojo tippuu lankaa pitkin hitaasti?



Liikkeyhtälöt:

$$ma_x = F_G - T$$

$$I\alpha = rT$$

Vierimisehdosta  $\alpha = a_x/r$

$$a_x = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

$$T = mg \left( \frac{I}{mr^2 + I} \right)$$

## Jojo

Jojon liikkessa kineettinen energia jakautuu etenemiseen ja pyörimiseen sitoutuneisiin osiin:

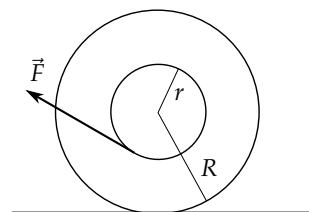
$$K_{\text{eteneminen}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_{\text{pyöriminen}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$\frac{K_{\text{pyöriminen}}}{K_{\text{eteneminen}}} = \frac{I}{mr^2}$$

## gallup

Mihin suuntaan Ilkan-special-jojo lähtee narusta vedettäessä?



- A vasemmalle
- B oikealle
- C tarvitsee lisää tietoa
- D ei osaa sanoa

Vast: C (riippuu  $\vec{F}$ :n ja vaakatason välisestä kulmasta)

kaapin paikka...

